Die Höhenlage des Kompensationsstückes beim Schichtungspendel

Von Rud. Pleskot

Schon beim alten Grahamschen Quecksilberpendel wurde eine Ungenauigkeit der Kompensationswirkung beobachtet, wenn im Bereiche der Pendellänge die Lufttemperatur in den verschiedenen Höhenschichten ungleich war, wenn also eine sogenannte „Temperaturschichtung" eintrat, hervorgerufen dadurch, daß die wärmere, infolge dessen weniger dichte und daher leichtere Luft bekanntlich aufsteigt.

Diese Erscheinung hatte ihren naheliegenden Grund darin, daß sich der kompensierende Teil (die Quecksilbersäule) ganz unten am Pendel befand, so daß er bei Eintritt einer Temperaturschichtung dem Einflusse einer tieferen Temperatur ausgesetzt war als gleichzeitig der Pendelstab an seinen höher gelegenen Stellen.

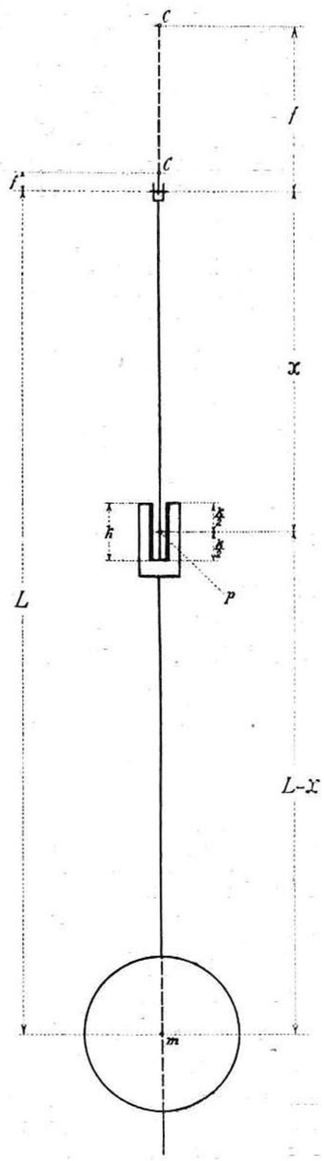

Abb. 1

Später, als in den Mannesmann-Stahlrohren lötnahtlose, also zur Aufnahme von Quecksilber geeignete Rohre von kleinem Durchmesser und der für Pendelstäbe erforderlichen Länge geboten waren, hat Riefler das Quecksilberpendel so umkonstruiert, daß sich die kompensierende Quecksilbersäule über den größten Teil (bis in eine Höhe von etwa zwei Drittel) der Pendellänge erstreckte, wodurch der Einfluß einer Höhenschichtung der Temperatur nahezu ausgeschaltet sein sollte.[1])

Seit jedoch Guillaume in der von ihm „Invar" genannten Nickel-Stahl-Legierung ein für Pendelstäbe so sehr geeignetes Material aufgezeigt und vor allen wieder Riefler daraufhin mit solchen Pendeln die besten Erfolge erzielt hat, erhalten die Präzisionspendeluhren so gut wie ausschließlich Nickelstahlpendel.

Wird nun beim Nickelstahlpendel das infolge der geringen Wärmeausdehnung des Invars sehr kurz ausfallende Kompensationsstück, wie es aus konstruktiven Gründen meist geschieht, ganz unten am Pendel oder doch knapp an der Linse angebracht, so äußert sich der Einfluß einer Temperaturschichtung hier ebenso wie beim Grahamschen Quecksilberpendel. Dieser Einfluß fällt natürlich um so stärker ins Gewicht, je höher die Anforderungen sind, die an die betreffende Präzisionspendeluhr gestellt werden. Es ist indessen möglich, ihn durch geeignete Konstruktion des Pendels, d. h. durch Einbau des Kompensationsstückes in einer bestimmten Höhenlage, auszuschalten, wie folgende Überlegung zeigt.

Angenommen, die Temperaturdifferenz zwischen unten und oben im Bereiche der Pendellänge betrage t Grad und vergrößere sich im Verlaufe einer allgemeinen Steigerung der Temperatur des Uhrraumes auf $(t+n)$ Grad. Ist dabei das Kompensationsstück ganz unten am Pendel angeordnet, so befindet es sich in einer Luftschicht, die eine geringere Wärmesteigerung erfährt als die höher gelegenen Schichten, und dehnt sich infolge dessen um einen verhältnismäßig geringeren Betrag aus als die weiter oben liegenden Teile des Pendels (Pendelstab, Aufhängefeder), also weniger, als zur vollständigen Ausgleichung der Ausdehnung des Pendelstabes erforderlich wäre. Das Pendel wird daher in einem solchen Falle zur Unterkompensation neigen, und dies um so stärker, je größer die Differenz der beiden extremen Schichtentemperaturen wird. Wäre das Kompensationsstück dagegen am oberen Ende des Pendels eingebaut, so ergäbe sich im allgemeinen eine analoge Neigung zur Überkompensation. Daraus folgt ohne weiteres, daß es eine gewisse mittlere Lage für das Kompensationsstück geben muß, bei der solche Fälle weder Unter- noch Überkompensation hervorrufen können, eine eintretende Temperaturschichtung somit keinen Einfluß auf die reduzierte Pendellänge hat.[2])

Es handelt sich nun darum, jene mittlere, in bezug auf den Einfluß der Temperaturschichtung neutrale Höhenlage des Kompensationsstückes zu ermitteln, also jenen Punkt am Pendel aufzusuchen — ich nenne ihn den „Schichtungsmittelpunkt" —, mit dem die Höhenmitte des Kompensationsstückes zusammenfallen soll, wie dies aus Abb. 1 zu ersehen ist.

Die Figur zeigt die für die vorliegenden Betrachtungen wesentlichen Umrisse eines Nickelstahlpendels. L ist die Länge des Pendelstabes von der Mitte des Hakenstiftes bis zum Mittelpunkt m der Linse (wo der Stab in dieser befestigt ist), f die an der Kompensationswirkung teilnehmende Länge der Aufhängefeder, d. i. das Maß von der — stillschweigend als unverrückbar angenommenen — Biegungsstelle C der Feder (Drehungsachse des Pendels) bis zur Hakenstiftmitte, k die Höhe (Länge) des Kompensationsstückes und x der Abstand des Schichtungsmittelpunktes p vom oberen Pendelstabende (Hakenstiftmitte).

Bestünde die Aufhängefeder (samt Fassung) aus dem gleichen Material wie der Pendelstab, hätten also beide den gleichen Ausdehnungskoeffizienten, so läge der Schichtungsmittelpunkt p — unter der zulässigen Voraussetzung, daß die Schichtentemperaturen nach oben gleichmäßig zunehmen — offenbar in

$$\frac{m\,C}{2} = \frac{L+f}{2},$$

also einfach in der Mitte zwischen der Drehungsachse C des Pendels und dem Linsenmittelpunkte m (wenn in diesem die Linse am Pendelstabe befestigt ist.)

In Wirklichkeit aber ist der Ausdehnungskoeffizient der Aufhängefeder größer als der des Pendelstabes, weil sie immer aus Stahl, der Pendelstab dagegen aus Nickelstahl besteht. Man kann sich jedoch die Stahlfeder durch eine Feder aus dem gleichen Material wie der Pendelstab, also (samt der Fassung) aus Nickelstahl, ersetzt denken, deren Länge so bemessen ist, daß durch den Austausch an der Kompensationswirkung des Pendels nichts geändert würde. Bedeutet f' diese ideelle Federlänge (vergl. Abb. 1), α den Ausdehnungskoeffizienten des Pendelstabes (Nickelstahl), β den der Stahlfeder, so müßte also die Beziehung bestehen:

$$f'\alpha = f\beta,$$

woraus die ideelle Federlänge

$$f' = f\,\frac{\beta}{\alpha}. \qquad \text{(1)}$$

Damit ist aber auch schon die Lage des Schichtungsmittelpunktes bestimmt, da er nach Obigem nun ebenfalls im Halbierungspunkte des Abstandes der Drehungsachse des Pendels — das ist jedoch jetzt C' — vom Linsenmittelpunkte m liegen muß, also in

$$\frac{\overline{m\,C'}}{2} = \frac{L+f'}{2},$$

so daß (vergl. Abb. 1)

$$x + f' = L - x,$$

woraus

$$x = \frac{L-f'}{2}. \qquad \text{(2)}$$

[1]) Vergl. aber: B. Wanach, „Über den Einfluß der Temperaturschichtung auf verschiedene Uhrenpendel", Astronom. Nachrichten, Band 166, Nr. 3967—68, 1904.

[2]) Die Uhrenfabrik Clemens Riefler in München hat bereits solche „Schichtungspendel" geliefert.

und nach Einsetzung des durch Gleichung (1) gegebenen Ausdruckes für f':

$$x = \frac{L - f\frac{\beta}{\alpha}}{2}$$

oder, wenn der Bruch im Zähler vermieden werden soll:

$$x = \frac{L\alpha - f\beta}{2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

In dieser Formel ist nur noch die Größe f unbekannt, d. i. der für die Kompensationswirkung des Pendels in Betracht kommende Teil der Federlänge. Sie setzt sich zusammen aus dem Abstande h (Abb. 2) der Hakenstiftmitte von der oberen Fläche des unteren Federfassungsteiles und jenem Stück der freien Federlänge, das unterhalb der Biegungsstelle der Feder liegt. Denn der oberhalb der Biegungsstelle der Feder, also außerhalb der mathematischen Pendellänge liegende Teil der Aufhängefeder hat auf die Kompensationswirkung des Pendels und somit auch auf die Lage des Schichtungsmittelpunktes keinen Einfluß.

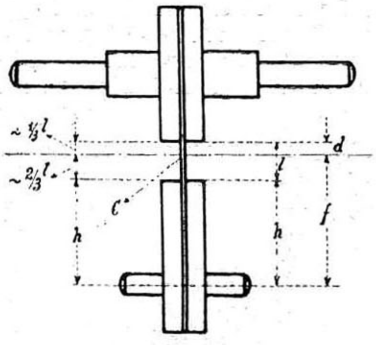

Abb. 2

Genau genommen liegt aber die Biegungsstelle der Feder nicht fest, sondern schwankt im Verlaufe der Schwingung innerhalb gewisser Grenzen. Nach H. Bock[3]) kann man sie indessen bei Amplituden von nicht mehr als 2 Grad nach jeder Seite, also stets auch bei Präzisionspendeluhren, als festliegend betrachten und diese Lage wie folgt berechnen:

Bezeichnet G das Gewicht des Pendels in kg, E den Elastizitätsmodul des Federstahls (den man mit 2 400 000 kg pro qcm einsetzen kann), J das äquatoriale Trägheitsmoment der Aufhängefeder,[4]) l die freie Länge der Feder in cm und e die Basis des natürlichen Logarithmensystems = 2,7182818..., und setzt man

$$\sqrt{\frac{G}{EJ}} = a$$

und

$$e^{al} = b\,,$$

so ist der Abstand d der als festliegend betrachteten Biegungsstelle der Aufhängefeder von der oberen Federfassung (vergl. Abb. 2) gegeben durch die Formel:

$$d = \frac{b - 1}{a\,(b + 1)}\ cm. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Somit ist die in unserem Falle in Betracht kommende (an der Kompensationswirkung des Pendels teilnehmende) Federlänge

$$f = h + l - d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

(vergl. Abb. 2).

Indem man nun die Formeln (4), (5) und (3) der Reihe nach anwendet, erhält man den gesuchten Schichtungsmittelpunkt.

---

[3]) Vergl. Dr.-Ing. H. Bock, „Kritische Theorie der freien Riefler-Hemmung"; Berlin, Julius Springer, 1910.

[4]) Nach der Lehre von den Trägheitsmomenten ist das äquatoriale Trägheitsmoment eines Rechteckes gegeben durch

$$J = \frac{b\,h^3}{12},$$

worin b die Basis und h die Höhe des Rechteckes bezeichnet.

Für eine aus zwei 4 mm breiten Streifen von 0,1 mm Dicke bestehende Blattfeder ist $b = b_1 + b_2 = 2 . 4 = 8$ mm, d. s. 0,8 cm, und $h = 0{,}01$ cm, also

$$J = \frac{0{,}8 \,.\, 0{,}01^3}{12} = 0{,}0000000667\ cm^4 = 0{,}667 \,.\, 10^{-7}\ cm^4.$$

Es ist jedoch gewiß ausreichend genau, vereinfachend

$$d = \frac{l}{3}$$

zu setzen, wie dies (soviel mir bekannt, auf Grund seinerzeitiger Untersuchungen Prof. Brönnimanns) auch sonst in der Praxis als brauchbare Annäherung angenommen wird, wobei sich dann

$$f = h + \frac{2}{3}\,l$$

und nach dessen Einsetzung in Formel (3)

$$x = \frac{L\alpha - (h + \frac{2}{3}\,l)\,\beta}{2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

als unsere Formel zur Berechnung des Schichtungsmittelpunktes ergibt, worin:

x = Abstand des Schichtungsmittelpunktes vom oberen Pendelstabende (Hakenstiftmitte),
L = Länge des Pendelstabes von Hakenstiftmitte bis Linsenmittelpunkt,
h = Abstand der oberen Fläche des unteren Federfassungsteiles von der Hakenstiftmitte,
l = freie Länge der Aufhängefeder,
α = Ausdehnungskoeffizient des Pendelstabes (Nickelstahl),
β = Ausdehnungskoeffizient der Aufhängefeder samt Fassung (Stahl).

Um ein Zahlenbeispiel anzufügen, seien folgende Größen eines Sekundenpendels gegeben: $L = 1010$ mm; $l = 4$ mm; $h = 14$ mm. Nimmt man α zu 0,00000100[5]) und β zu 0,00001079 an, so ergibt obige Formel:

$$x = \frac{1010 \,.\, 100 - (14 + \frac{2 \,.\, 4}{3})\ 1079}{2 \,.\, 100} = 415\ mm.$$

Der Schichtungsmittelpunkt liegt bei diesem Pendel also 415 mm unterhalb der Hakenstiftmitte, und das Kompensationsstück wäre so anzuordnen, daß seine Höhenmitte mit diesem Punkte zusammenfällt (vergl. Abb. 1).

Wohl zu beachten ist, daß unsere Formel nur gilt, wenn die Fassung der Aufhängefeder wie diese selbst aus Stahl besteht. Fassungen aus Messing, Neusilber oder, wie hie und da wohl auch angewendet, aus Nickelstahl haben den Nachteil, daß ihr thermisches Verhalten unbestimmt ist, da im einzelnen Falle niemals mit ausreichender Gewißheit vorausgesehen werden kann, zu welchem gemeinschaftlichen Werte sich die beiden Ausdehnungskoeffizienten von Feder und Fassung kombinieren werden. Dies hängt nicht sowohl von der Konstruktion des Aufhängungsteiles, als vielmehr von der praktischen Ausführung, also von manchen zufälligen, kaum kontrollierbaren Umständen ab. Wie aus Obigem hervorgeht, ist aber gerade das Verhalten des Aufhängungsteiles auf die Lage des Schichtungsmittelpunktes von bestimmendem Einfluß, und ebenso fällt seine Ausdehnung bei der Kompensationswirkung des Pendels stark ins Gewicht. Es ist daher wichtig, den Aufhängungsteil bei der Berechnung eines solchen Pendels genau erfassen zu können, was eben nur möglich ist, wenn Feder und Fassung aus dem gleichen Material bestehen. Bei Präzisionspendeln sollten daher keine anderen Aufhängefedern zur Anwendung kommen als solche mit Stahlfassung.

---

[5]) Nach freundlichen Mitteilungen des Herrn Prof. Dr. Guillaume schwankt der Ausdehnungskoeffizient des Invars je nach dem Ausfall der Legierung und je nach der den Barren nachträglich zuteil werdenden thermischen und mechanischen Behandlung zwischen 2,5 und 0,6 Millionsteln. Die kleinsten Werte haben eine von vornherein vollkommen gelungene Legierung zur Voraussetzung, deren Ausdehnungskoeffizient außerdem nachträglich durch entsprechende Behandlung des Materials auf jede mögliche Weise noch herabgedrückt wurde, wobei er auch eine hohe Konstanz erhält. Die höchste Ziffer versteht sich für minder gut gelungene und nachher auch nicht weiter behandelte Abstiche.

Die am häufigsten vorkommenden Werte liegen zwischen 1,0 und 1,5 Millionsteln. Im allgemeinen sind die Hüttenwerke in der Lage, Stäbe von innerhalb der oben angegebenen Grenzen vorgeschriebener Ausdehnung bis auf 0,2 Millionstel genau zu liefern.

Quelle: Deutsche Uhrmacher-Zeitung Nr. 44 vom 31.10.1918 S. 266/267