Deutscher Uhrmacher-Kalender 1914 S. 15-87

Räderwerksberechnung

von Richard Felsz

Es gibt noch immer formelscheue Kollegen. Solche bitte ich inständig, die wenigen nachstehenden Zeilen zu lesen.

Ich weifs nicht, wer es einmal ausgesprochen hat, aber es ist sehr hübsch gesagt: Die Formel denkt für uns. Wir brauchen uns nicht den Kopf zu zerbrechen, wie das alles zusammenhängt, die Formel lehrt kurz und deutlich: so wird's gemacht! „Aber ich kann sie nicht benutzen, die Buchstabenrechnung habe ich nicht erlernt," hört man entgegnen. Ist auch nicht nötig, lieber Freund. Was in dem Folgenden gegeben ist, bedarf gar keiner besonderen Kenntnisse, um es zu verstehen. Die Buchstaben stehen hier einfach nur als vorteilhafte und bequeme Abkürzung der schwerfälligen Vorschrift in Worten; ihre Bedeutung ist vorher erklärt.

Wo liegt nun eine Schwierigkeit, wenn da erklärt wird: Die Radzahnzahlen werden durch die grofsen Buchstaben A, B, C usw., die Triebzahnzahlen durch die kleinen Buchstaben a, b, c usw. und die stündlichen Umdrehungen der letzten Triebwelle eines Räderwerks mit U bezeichnet, — wo liegt da auch nur die allergeringste Schwierigkeit, um die Buchstabenbezeichnung z. B. der Formel $\frac{A \cdot B \cdot C}{a \cdot b \cdot c} = U$ für einen gegebenen Fall in die entsprechenden Worte zu kleiden: „Die Minutenradszahnzahl mal Zwischenradszahnzahl mal Sekunderadszahnzahl, dividiert durch die Zwischentriebszahnzahl mal Sekundentriebszahnzahl mal Gangradstriebszahnzahl ist gleich der Anzahl der Umdrehungen des Gangrades während einer Umdrehung des Minutenrades"?

Wie weitschweifig und unübersichtlich erscheint diese wörtliche Vorschrift gegenüber der knappen, klaren Fassung der Buchstabenformel! Prägt sich diese nicht auch viel leichter dem Gedächtnis ein? Und so ist's in allen anderen Fällen auch, die hier behandelt sind. Und wenn dazwischen einmal etwas ähnliches steht wie:

„Aus $U = \frac{A \cdot B}{a \cdot b}$ folgt $A \cdot B = U \cdot a \cdot b$",

so werde man nicht gleich wieder buchstabenscheu, sondern vergegenwärtige sich ruhig durch einfache Zahlen, wie harmlos das Sätzlein ist. Denn es verursacht doch wahrlich kein Kopfzerbrechen, um einzusehen, dafs z. B. aus $10 = \frac{5 \cdot 12}{2 \cdot 3}$ auch folgt, dafs $5 \cdot 12 = 10 \cdot 2 \cdot 3$ ist. Um aber hier und da doch vielleicht auftauchende Zweifel über richtige Anwendung und überhaupt jede Unsicherheit zu bannen, sind den meisten Formeln noch Erläuterungen in Gestalt von Anmerkungen und Zahlenbeispiele angefügt.

Wer hat nun noch den Mut zu sagen: „Das verstehe ich nicht"? Oder wer wollte gar behaupten, dafs er sich an die einfache Ausrechnung stiefse? Ich glaube, keiner. Eher glaube ich, dafs der und jener fragt: „Wozu denn aber diese Rechnung? Dem zur Antwort ein Fall — kein allzu seltener — aus der Praxis. In einer Uhr ist die Spirale vernichtet. Das Räderwerk zeigt eine ungewöhnliche Verzahnung. Es ist zweifelhaft, ob die Unruh die bekannte Anzahl von 18000 Schwingungen in der Stunde macht. Was nun? Will der Herr Kollege mühsam probieren, bis er das Richtige endlich getroffen, oder ist's — ganz abgesehen von der Unwürdigkeit eines so dilettantenhaften Verfahrens — nicht viel einfacher, aus den Zahnzahlen die Umdrehungen und aus diesen in gleich einfacher Weise (vgl. Formel 4) die Schwingungszahl zu berechnen? Und noch eins (Moritz Grofsmann hat es schon im

Kalender 1879 betont, man kann es aber nicht oft genug wiederholen): Man soll sich beim Ersatz zerbrochener Teile niemals darauf beschränken, z. B. ein Rad oder Trieb, oder beides, wenn auch aus den Überresten noch die Gröfsen zu erkennen sind, lediglich in den gleichen Verhältnissen wiederherzustellen, sondern man soll in jedem Falle die richtigen Verhältnisse erst durch Rechnung ermitteln.

Also weg mit der Formelscheu! Mögen alle, die es angeht, das Mahnwort beherzigen: Lehrherren, erzieht eure Zöglinge auf der einzig sicheren Grundlage theoretischer Kenntnisse; Gehilfen, holt nach, was ihr darin etwa versäumt habt!

A. Ermittlung von Umdrehungs-, Schwingungs- und Zahnzahlen

Vorbemerkung

Unter „Umdrehungszahl eines Räderwerks" versteht man allgemein die Anzahl der Umdrehungen, welche die letzte Welle des Werkes während einer Umdrehung der ersten Welle macht. Was man unter „erster" und „letzter" Welle zu verstehen hat, kommt auf den Fall an. Wenn es sich um die Berechnung des Räderwerks vom Minutenrad bis zum Gangrad handelt, so gilt die Minutenradswelle als erste, die des Gangrades als letzte. Unter „Umdrehungszahl" versteht man dann speziell die Zahl der Umdrehungen der Gangradswelle während einer Umdrehung der Minutenradswelle, mithin in der Zeit von einer Stunde. Vollzieht in dieser Zeit das Gangrad z. B. 570 Umgänge, so sagt man: die Umdrehungszahl dieses Gehwerks ist 570.

Ebenso versteht man unter der „Schwingungszahl" eines Uhrwerks diejenige Anzahl von Pendel- oder Unruhschwingungen, welche das Werk während einer Stunde, also ebenfalls während einer Umdrehung der Minutenradswelle macht.

In den Formeln und Zahlenbeispielen des folgenden ersten Abschnittes, welcher die Berechnungen des Räderwerks vom Minutenrad bis zum

Gangrad umfaſst, gelten also die Ausdrücke Schwingungszahl und Umdrehungszahl immer in diesem Sinne, während in dem zweiten Abschnitt bei der Berechnung des Räderwerks vom Antriebrad (Federhaus- oder Walzenrad) bis zum Minutentrieb dieses als letzte Welle gilt und unter „Umdrehungszahl“ dann die Anzahl der Umdrehungen zu verstehen ist, welche die Minutenradswelle in einer bestimmten Zeit macht. Ähnlich ist's im dritten Abschnitt bei der Berechnung von Zeigerwerken, worüber an Ort und Stelle jedesmal genaue Auskunft gegeben wird.

Bezeichnungen

A, B, C . .	Zahnzahlen der Räder;	
a, b, c . . .	Zahnzahlen der Triebe;	
N	Zahnzahl des Gangrades;	
S	die Schwingungszahl = Zahl der Unruh- oder Pendelschwingungen	in bestimmter Zeit.
U	die Umdrehungszahl = Zahl der Umdrehungen der letzten Welle	
u	Zahl der Umdrehungen der ersten Welle	

1. Berechnung vom Minutenrad bis zum Gangrad

I. Gesucht U (die Umdrehungszahl)

a) aus den gegebenen Zahnzahlen

$$U = \frac{A \,.\, B \,.\, C}{a \,.\, b \,.\, c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Zahlenbeispiel: In einer Taschenuhr finden wir folgende Zahnzahlen: Minutenrad 75, Zwischenrad 72, Sekundenrad 70 Zähne; Zwischentrieb 10, Sekundentrieb 9, Gangradstrieb 7 Zähne. Wie viele Umdrehungen macht das Gangrad in 1 Stunde?

$$U = \frac{75 \,.\, 72 \,.\, 70}{10 \,.\, 9 \,.\, 7} = 600.$$

b) aus der gegebenen Schwingungszahl u. Gangradszahnzahl

$$U = \frac{S}{2\,N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

Zahlenbeispiel: Eine Taschenuhr hat ein Gangrad mit 15 Zähnen und macht 18000 Unruhschwingungen in der Stunde. Hieraus ergibt sich die Umdrehungszahl:

$$U = \frac{18\,000}{2 \,.\, 15} = 600.$$

II. Gesucht S (die Schwingungszahl) aus den gegebenen Zahnzahlen

$$S = \frac{A \,.\, B \,.\, C \,.\, 2\,N}{a \,.\, b \,.\, c} \ldots\ldots\ldots 3)$$

Oder, da $\frac{A \,.\, B \,.\, C}{a \,.\, b \,.\, c} = U$, so ist auch

$$S = U \,.\, 2\,N \ldots\ldots 4)$$

Zahlenbeispiele: Wir legen abermals die in den vorstehend unter I angeführten Beispielen gegebenen Zahnzahlen zugrunde und haben dann nach Formel 3):

$$S = \frac{75 \,.\, 72 \,.\, 70 \,.\, 2 \,.\, 15}{10 \,.\, 9 \,.\, 7} = 18\,000$$

oder nach Formel 4):

$$S = 600 \,.\, 2 \,.\, 15 = 18000.$$

III. Gesucht A (eine fehlende Radzahnzahl) aus den gegebenen übrigen Zahnzahlen und der Umdrehungszahl

$$A = \frac{a \,.\, b \,.\, c \,.\, U}{B \,.\, C} \ldots\ldots 5)$$

Zahlenbeispiel: In einem Taschenuhrwerk ohne Sekunde ist das Zwischenrad vom Triebe los- und verloren gegangen. Die anderen beiden Räder haben 75 und 64 und das Gangrad 15 Zähne; die Triebe haben 10, 8, 7 Zähne. Die Zählung der Unruhschwingungen ergibt 300 Schwingungen in 1 Minute; die Uhr macht sonach 18000 Schwingungen in 1 Stunde. Nach Formel 2) ist

$$U = \frac{18000}{2.15} = 600;$$ und nach Formel 5) ist

$$A = \frac{10.8.7.600}{75.64} = 70;$$

das Zwischenrad mufs demnach 70 Zähne erhalten.

IV. Gesucht a (eine fehlende Triebzahnzahl) aus den gegebenen übrigen Zahnzahlen und der Umdrehungszahl

$$a = \frac{A.B.C}{b.c.U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Zahlenbeispiel: Legen wir die gleichen Verhältnisse wie im vorstehenden Beispiel zugrunde und nehmen an, das Gangradstrieb sei verloren gegangen, so ist

$$a = \frac{75.70.64}{10.8.600} = 7.$$

V. Gesucht A und a (Rad- mit Triebzahnzahl) aus den gegebenen übrigen Zahnzahlen und der Umdrehungszahl

$$\frac{A}{a} = \frac{b.c.U}{B.C} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

Anmerkung 1. Die Lösung $\frac{A}{a}$ ist mehrdeutig, denn sie gibt als gekürzter Bruch nur das Verhältnis an, in dem die gesuchten Zahnzahlen zu den gegebenen stehen; Zähler und Nenner sind erst noch mit einem passenden Faktor zu multiplizieren, um die richtigen Zahlen zu erhalten. Ist nun z. B. das Resultat $\frac{A}{a} = \frac{8}{1}$, so ergibt die Multiplikation mit dem Faktor 8 die Radzahnzahn $= 8$ mal $8 = 64$ und die Triebzahnzahl $= 8$ mal $1 = 8$, während man bei der Benutzung des Faktors 10 für das Rad $10.8 = 80$ und für das Trieb $10.1 = 10$ Zähne erhält. Beide Lösungen ergeben die Schwingungszahl $= 18000$; in dieser Beziehung wäre es also gleich, welche wir wählten. Indessen sind wir noch von der Eingriffsweite und den gegebenen Durchmessern abhängig und deshalb genötigt, uns danach zu richten wie folgt.

Zahlenbeispiel. Es sei gegeben ein Taschenuhrwerk, dessen Zwischenrad und Trieb verloren gegangen und dessen übrige hier in Betracht kommenden Zahnzahlen folgende sind: Minutenrad 80, Sekundenrad 70, Gangrad 15; Sekundentrieb 10 und Gangtrieb 7. Wir zählen in der Minute 300 Unruhschwingungen, die Schwingungszahl ist also = 18000 und die Umdrehungszahl (vgl. Formel 2) $= \frac{18000}{2 \cdot 15} = 600$. Wir finden nun

$$\frac{A}{a} = \frac{10 \cdot 7 \cdot 600}{80 \cdot 70} = \frac{15}{2}.$$

Multiplizieren wir z. B. Zähler und Nenner dieses Bruches mit dem Faktor 4, so erhalten wir $\frac{60}{8}$; multiplizieren wir mit 5, so erhalten wir $\frac{75}{10}$; d. h. im ersten Falle würden wir dem Zwischenrad 60 und dem Triebe 8 Zähne geben müssen, im anderen Falle aber 75 bzw. 10. Nehmen wir nun an, die Eingriffsweite vom Minutenrad zum Zwischenrad sei = 7,4 mm und der volle Minutenradsdurchmesser 13,65 mm, so finden wir den hier in Rechnung zu stellenden wirksamen Durchmesser (vgl. weiter unten die Vorbemerkung zum Abschnitt C und Formel 32) = 13,13; mithin beträgt der wirksame Halbmesser 6,565 oder, auf 2 Dezimalstellen abgerundet, 6,57 mm. Nun setzt sich die Eingriffsweite aus den beiden wirksamen Halbmessern von Rad und zugehörendem Trieb zusammen, daher erhalten wir, wenn wir den berechneten Halbmesser 6,57 von der gemessenen Eingriffsweite 7,4 abziehen, 0,83 mm als wirksamen Halbmesser des gesuchten Triebes. Dieser aber verhält sich zum wirksamen Radhalbmesser wie 0,83 : 6,57 oder nahezu wie 1 : 8. Nach der Grundregel, dafs sich die wirksamen Durchmesser wie die Zahnzahlen verhalten, müssen wir hier also das Verhältnis 1 : 8 wählen, d. h. zum 80er Minutenrad ein 10er Zwischentrieb stellen, woraus sich von selbst ergibt, dafs hier $\frac{A}{a}$ nicht $= \frac{60}{8}$, sondern $= \frac{75}{10}$

ist, das Zwischenrad A demnach 75 Zähne erhalten mufs. Übrigens ergibt die Berechnung von A (nach Formel 5), die wir jetzt anstellen können, da uns nun auch a (= 10) gegeben ist, mit:

$$A = \frac{10 \,.\, 10 \,.\, 7 \,.\, 600}{80 \,.\, 70} = 75$$

die Richtigkeit unserer Lösung, die endlich auch eine Berechnung nach der Eingriffsweite vom Sekundentrieb zum Zwischenrad in der oben beschriebenen Weise bestätigen würde.

VI. Gesucht die Zahnzahlen sämtlicher Räder vom Minutenrad bis zum Gangrad (einschließlich)

Anmerkung 2. Diese Aufgabe erwächst uns wohl nur beim Entwurf eines neuen Uhrwerkes, insbesondere eines solchen mit Pendel, da die Radzahnzahlen für Taschenuhrwerke in der Regel an die praktische Schwingungszahl 18000 und die ebenso praktische Gangradzahnzahl 15 gebunden, übrigens auch allgemein bekannt sind. Dagegen bedingen Pendeluhren je nach ihrem Zweck, ihrer Gröfse, Gehäuseform u. a. m. oft sehr verschiedene Pendellängen, mithin auch eine verschieden grofse Schwingungszahl, von der wir bei der Entwurfsberechnung ausgehen müssen.

Aus der Formel 3) $S = \frac{A \,.\, B \,.\, C \,.\, 2N}{a \,.\, b \,.\, c}$ folgt:

$$A \,.\, B \,.\, C \,.\, N = {}^1/_2\, S \,.\, a \,.\, b \,.\, c \,.\,.\,.\,.\; 8)$$

d. h. das Produkt aus den Radzahnzahlen ist gleich dem Produkte aus der halben Schwingungszahl und den Triebzahnzahlen. Letztere bestimmt man nach Belieben, während die Schwingungszahl eben durch die Pendellänge gegeben ist (vgl. eine Pendellängen-Tabelle). Die hierdurch bestimmten Faktoren ${}^1/_2\, S$, a, b, c würden bei ihrer Multiplikation nach Formel 8) also nur das Gesamtprodukt der Radzahnzahlen ergeben; um diese einzeln zu erhalten, mufs man das Gesamtprodukt erst wieder in passende Faktoren zerlegen. Das geschieht am einfachsten, wenn man jede der gegebenen Gröfsen

($\frac{1}{2}$ S, a, b, c) einzeln in Primzahlen*) zerlegt und hieraus durch beliebige, selbstverständlich geeignete Multiplikation dieser Primzahlen die passendsten Radzahnzahlen bildet. Ein Beispiel wird das Verfahren schnell erläutern. Zuvor jedoch noch

Anmerkung 3. Bei der Berechnung der Radzahnzahlen empfiehlt es sich, zuerst die Zahnzahl des Gangrades zu bestimmen, soweit sie nicht schon durch gegebene Verhältnisse bestimmt ist. So werden Uhren mit Sekundenpendel immer 30 Gangradszähne, Uhren mit Dreiviertelsekundenpendel aber 40 erhalten müssen, damit bei den 60 bzw. 80 Pendelschwingungen das Gangrad in einer Minute gerade eine Umdrehung macht. In anderen Fällen wird man die Gangradzahnzahl am besten weder unter 20 noch über 40 wählen, abgesehen von Taschenuhrwerken, wo, wie schon gesagt, 15 als Zahnzahl für das Gangrad üblich und vorteilhaft ist.

Zahlenbeispiel. Die Radzahnzahlen zu finden für ein Uhrwerk, dessen Pendel 9800 Schwingungen stündlich machen soll. Wir entschliefsen uns, dem Werke ein 8er Zwischentrieb und ein 6er Gangtrieb zu geben.

Gegeben ist also: $S = 9800$, $a = 8$, $b = 6$.

Gesucht wird: A, B, N.

Das ergibt nach Formel 8) zusammengestellt:

$$A \,.\, B \,.\, N = \frac{9800}{2} \,.\, 8 \,.\, 6 = 4900 \,.\, 8 \,.\, 6.$$

Zerlegen wir nun diese drei Faktoren in Primzahlen, wie in Anmerkung 2 vorgeschlagen ist, so finden wir bei der Prüfung auf ihre Zerlegbarkeit, dafs die Zahl 4900 zunächst durch 100 oder 10 . 10 oder endlich — auf Primfaktoren zurückgeführt — durch 2 . 5 . 2 . 5 teilbar ist. Die Zahl 49 aber enthält offensichtlich die Primfaktoren 7 . 7, so dafs die ganze Zahl 4900 aus den Primfaktoren 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 besteht. Ferner übersehen wir sofort, dafs die Zahl

*) Primzahlen sind solche Zahlen, die nicht durch andere ganze Zahlen (abgesehen von der Einheit) teilbar sind, die sich daher auch nicht in Faktoren zerlegen lassen, z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13 usw. (Vgl. den Artikel S. 72: Von der Teilbarkeit der Zahlen.)

8 in 2.2.2. und die Zahl 6 in 2.3 zerlegt werden kann. Wir haben also:

$$4900 = 2.5.7.2.5.7$$
$$8 = 2.2.2$$
$$6 = 2.3$$

Wie erwähnt, ist es vorteilhaft, zuerst N, die Gangradzahnzahl, zu bestimmen, die zwischen 20 und 40 liegen soll. Wir erhalten da bei der nun nötigen Multiplikation der Primfaktoren z. B. durch $2.2.7 = 28$ eine passende Zahnzahl für N, weiter durch $2.3.2.7 = 84$ eine geeignete Zahnzahl für B, und endlich durch die Multiplikation der noch verbliebenen Primzahlen $2.2.5.5 = 100$ die letzte Zahnzahl für A.

Oder bei anderer Verbindung obiger Primfaktoren:

2) $N = 30$, $B = 80$, $A = 98$;
oder 3) $N = 30$, $B = 70$, $A = 112$;
„ 4) $N = 35$, $B = 80$, $A = 84$;
„ 5) $N = 35$, $B = 70$, $A = 96$.

Unter den verschiedenen Lösungen bevorzugt man nun diejenige, bei welcher die Zahnzahlen am wenigsten verschieden sind. So würde hier also die 2. oder 4. Lösung den übrigen vorzuziehen sein.

Anmerkung 4. Selbstverständlich kann man auch die Zahnzahlen in gleicher Weise anstatt aus der Schwingungszahl S aus der Umdrehungszahl U ermitteln, denn aus der Formel $U = \frac{A.B.C}{a.b.c}$ folgt ebenfalls:

$$A.B.C = U.a.b.c \; \ldots\ldots \; 9)$$

2. Berechnung vom Antriebrad bis zum Minutentrieb und umgekehrt

VII. Gesucht die Zahnzahlen vom Antriebrad — Walzenrad, Federhausrad oder Schneckenrad — bis zum Minutenradstrieb

Anmerkung 5. Hier fragt es sich vor allem, wie lange Zeit die Uhr mit einem Aufzug gehen soll. Diese Zeit wird nach Stunden berechnet.

Dividiert man dann diese Stundenzahl durch die Anzahl der Walzen- oder Feder- oder Schneckenradsumgänge, so erhält man die Umdrehungszahl des Minutentriebes, d. h. die Zahl seiner Umdrehungen für die Zeit einer Umdrehung des Antriebrades. Soll z. B. eine Gewichtuhr mit einem Aufzug 36 Tage gehen, und die Walze hat 12 Umgänge, so ist:

$$U = \frac{36 \cdot 24}{12} = 72.$$

Wenn hierbei die Umdrehungszahl nicht gröfser als 20 ist, so wird gewöhnlich kein Zwischentrieb benutzt; das Antriebrad greift also direkt in das Minutentrieb. Für eine Umdrehungszahl zwischen 20 und 100 wählt man dagegen ein sog. Zusatz- oder Beisatztrieb und -Rad. Höhere Umdrehungszahlen (die sehr selten vorkommen) erfordern zwei Zusatztriebe. Die Triebzahnzahlen wählt man wieder nach Belieben.

Zwei Zahlenbeispiele.

1) Die Zahnzahl eines Federhausrades zu bestimmen, wenn die Uhr bei 4 Federumgängen 30 Stunden gehen und das Minutentrieb 12 Zähne erhalten soll.

Es ist gegeben: $U = \frac{30}{4} = 7^1/_2$; $a = 12$.

Gesucht wird A (eine fehlende Radzahnzahl).

Es liegt hier die Aufgabe vor, welche Formel 5) regelt; nur dafs Formel und Berechnung mangels der Gröfsen B, C und b, c sich ganz einfach gestalten:

$$A = a \,.\, U = 7^1/_2 \,.\, 12 = 90.$$

Das Federhaus mufs 90 Zähne erhalten.

2) Die Zahnzahl des Federhausrades und eines Beisatzrades für eine Uhr zu bestimmen, die mit einem Aufzug 12 Tage gehen soll; die Feder macht 6 Umgänge, das Beisatztrieb wird 16, das Minutentrieb 14 Zähne erhalten.

Es ist sonach gegeben:

$$U = \frac{12 \,.\, 24}{6} = 48;\; a = 16,\; b = 14.$$

Gesucht werden A und B.

Hier liegt der Fall der Formel 9) vor. Wir haben:

$$A \,.\, B = U \,.\, a \,.\, b = 48 \,.\, 16 \,.\, 14.$$

Durch die (Seite 23 bis 24 beschriebene) Zerlegung der Faktoren in Primzahlen:

$$48 = 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$$
$$16 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$$
$$14 = 2 \,.\, 7$$

erhalten wir nach verschieden vorgenommener Multiplikation dieser Primzahlen als beste Lösungen:

$$A = 128\,,\; B = 84;$$
$$\text{oder } A = 112\,,\; B = 96.$$

VIII. Gesucht die Umdrehungen u des ersten (Antrieb-) Rades für eine bestimmte Zeit

Gegeben sind die Zahnzahlen und die Umdrehungszahl U des Minutentriebes

$$u = \frac{a \,.\, b \,.\, U}{A \,.\, B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Zahlenbeispiel. Legen wir die Zahnzahlen des oben stehenden 2ten Beispieles zugrunde, so haben wir Federhausrad $(A) = 112$, Beisatzrad $(B) = 96$, Beisatztrieb $(a) = 16$ und Minutentrieb $(b) = 14$ Zähne. Als „bestimmte Zeit“ wählen wir die Zeit von 1 Tag = 24 Stunden und erhalten somit die Umdrehungszahl U des Minutentriebes ebenfalls = **24.** Es ergibt sich dann nach Formel 10):

$$u = \frac{16 \,.\, 14 \,.\, 24}{112 \,.\, 96} = \frac{1}{2}.$$

Das Federhausrad dreht sich also in 1 Tag $\frac{1}{2}$ mal herum.

Anmerkung 6. Diese Ermittlung hat den praktischen Wert, die Gangzeit einer Uhr bestimmen zu können. Multiplizieren wir die Zeit einer Umdrehung des Antriebrades mit der Anzahl der Federumgänge, so erhalten wir die ganze Gangzeit der Uhr. Hier also, wo eine Umdrehung = 2 Tage ist und die Feder 6 Umgänge macht, sind es $2 \,.\, 6 = 12$ Tage. Oder umgekehrt: Wenn es sich darum handelt, bei der Wahl der Feder die erforderliche Anzahl ihrer Umgänge zu wissen, um der Uhr die gewünschte volle Gangzeit zu sichern, so ist diese volle Gangzeit durch die Zeit einer Umdrehung des Federhauses zu dividieren, woraus sich in unserm Falle $\frac{12}{2} = 6$ Umgänge ergeben.

Die Ermittlung der Gangzeit einer Federzuguhr ist hiernach sehr einfach. Verwickelter wird sie, wenn sie Uhren mit Kettenzug oder Schnurtrommel (Walze) betrifft. Wir werden deshalb diesen Fällen einen besonderen Abschnitt widmen. (Vgl. Seite 30, Abschnitt B.)

3. Berechnung der Zeigerwerke

IX. Gesucht die Zahnzahlen eines Zeigerwerks

a) Bestimmung beider Radzahnzahlen

Anmerkung 7. Diese Bestimmung geschieht wieder nach der Zerlegungsmethode (vgl. Fall VI) auf Grund der Formel 9): $A \cdot B = U \cdot a \cdot b$. Die Triebzahnzahlen a, b wählt man nach Belieben, und die Umdrehungszahl U ist bei den gewöhnlichen Zeigerwerken stets $= 12$. (Nur bei Sternzeituhren oder manchen astronomischen Werken, überhaupt bei Uhren, deren Zifferblatt in 24 Stunden geteilt ist, haben wir $U = 24$.) Sonach sind U, a und b immer gegeben und die gesuchten Radzahnzahlen A und B zu berechnen wie im folgenden Beispiel.

Zahlenbeispiel. Die Zahnzahlen des Stundenrades und Wechselrades zu bestimmen, wenn wir dem Viertelrohr 40 und dem Wechseltrieb 10 Zähne geben wollen. Es ist hier:

$$A \cdot B = U \cdot a \cdot b = 12 \cdot 40 \cdot 10.$$

Die Zerlegung dieser Faktoren in Primzahlen ergibt:

$$12 = 2 \cdot 3 \cdot 2$$
$$40 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$
$$10 = 2 \cdot 5.$$

Hieraus erhalten wir durch beliebige Multiplikation der Primfaktoren umstehende Zahnzahlen:

$$\begin{array}{rl} .3.2.5 & A=60 \\ 2.5.2.2.2 & B=80 \\ \text{oder } 2.5.5 & A=50 \\ 2.3.2.2.2.2 & B=96 \text{ usw.} \end{array}$$

Anmerkung 8. Unter den verschiedenen Lösungen, die man bei der Zerlegungsmethode erhält, bevorzugt man hier diejenige, bei welcher die Zahnzahlensumme von Wechselrad und Viertelrohr der Zahnzahlensumme von Stundenrad und Wechseltrieb am nächsten kommt. So wird man in obigem Zahlenbeispiel die erste Lösung der zweiten vorziehen, denn hier ist $50+40=90$ und $96+10=106$, während dort $60+40=100$ und $80+10=90$ die geringere Differenz zwischen beiden Zahnzahlensummen bietet.

b) Bestimmung der Zahnzahl eines fehlenden Stundenrades

Anmerkung 9. In vielen Fällen, namentlich bei Uhren mit Schlagwerk, haben Viertelrohr und Wechselrad gleich viele Zähne. Alsdann muſs das Stundenrad stets 12 mal soviele Zähne erhalten als das Wechseltrieb. Hierbei ist es gleichgiltig, welche Zahnzahl das Viertelrohr und Wechselrad haben, sie muſs nur eben bei beiden die nämliche sein. Andernfalls dient zur Ermittlung der Stundenradzahnzahl die Formel 5):

$$A=\frac{a \,.\, b \,.\, U}{B}.$$

Zahlenbeispiel. Zu dem Zeigerwerk: Viertelrohr = 24, Wechseltrieb = 8 und Wechselrad = 36 Zähne wird die Zahnzahl des Stundenrades gesucht. Nach obiger Formel ist die Lösung:

$$A=\frac{24 \,.\, 8 \,.\, 12}{36}=64.$$

c) Bestimmung der Zahnzahlen für ein fehlendes Rad und Trieb im Zeigerwerk

Hier dient Formel 7):

$$\frac{A}{a}=\frac{b \,.\, U}{B}.$$

Anmerkung 10. Auch hier (vgl. die Anmerkung 1 zu Fall V) gibt die Lösung als gekürzter

Bruch nur das Verhältnis an, in welchem die gesuchten Teile zu den vorhandenen stehen müssen; Zähler und Nenner sind also noch mit einem passenden Faktor zu multiplizieren.

Zahlenbeispiel. Zu einem Stundenrad mit 96 Zähnen und dem Wechseltrieb mit 12 Zähnen sind die Zahnzahlen für das Viertelrohr und Wechselrad zu ermitteln. Nach der soeben nochmals angeführten Formel 7) ist also

$$\frac{A}{a} = \frac{12 \,.\, 12}{96} = \frac{3}{2}.$$

Hier gibt es nun, wie auch in anderen ähnlichen Fällen, eine grofse Anzahl von Lösungen. Man könnte z. B. dem Wechselrad 3×15 oder 3×16 oder 3×17 usw. Zähne geben, und dem Viertelrohr entsprechend 2×15 oder 2×16 oder 2×17 usw. Auch hier gilt aber das in der Anmerkung 8, S. 28 Gesagte, nämlich dafs man diejenige Lösung bevorzugt, bei der die beiderseitigen Summen der Zahnzahlen gleich oder nahezu gleich sind. In unserem Falle ist $96 + 12 = 108$. Man wird also am besten als Faktor 22 wählen, denn $3 \times 22 = 66$ (als Zahnzahl des Wechselrades) und $2 \times 22 = 44$ (als Zahnzahl des Viertelrohres) ergeben in Summa ebenfalls nahezu 108. Anders liegt der Fall, wenn es sich um die Ermittlung der Zahnzahlen von Viertelrohr und Stundenrad oder von Wechseltrieb und Wechselrad handelt, wo es noch gilt, die Zahnzahlen den gegebenen Eingriffsverhältnissen angemessen auszuwählen, wie bereits im Zahlenbeispiel S. 21 erläutert worden ist.

Anmerkung 11. Im vorstehenden Zahlenbeispiel ist das Übersetzungsverhältnis vom Viertelrohr zum Wechselrad und vom Wechseltrieb zum Stundenrad $\frac{44}{66} \cdot \frac{12}{96} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$. In den gewöhnlichen Taschenuhren findet man es fast durchweg $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Deshalb ist es dort leicht ersichtlich, mit welchen Zahnzahlen man es bei einzelnen fehlenden Teilen zu tun hat. Findet man ein 10er Viertelrohr vor und hierzu ein Wechselrad mit 30 Zähnen, so liegt das Verhältnis $^{10}/_{30} = ^{1}/_{3}$ klar zutage. Hat nun das Wechseltrieb 8 Zähne, so ist's nicht minder klar, daſs zur weiterhin erforderlichen $^{1}/_{4}$-Bewegung des Stundenrades dieses $8 \cdot 4 = 32$ Zähne haben muſs. Oder findet man am Stundenrad 40 Zähne, so läſst diese Zahl schon auf ein Wechseltrieb mit dem 4ten Teil von 40, also mit 10 Zähnen schlieſsen, und zählen wir nun noch ein 12er Viertelrohr, so liegt es auf der Hand, daſs das Wechselrad $12 \cdot 3 = 36$ Zähne erhalten muſs.

B. Berechnung der Gangzeit von Gewichtsuhren und verwandte Aufgaben über Fallhöhe, Walzenlänge usw.

Bezeichnungen*)

U_1 = Gangzeit einer Uhr mit Ringkette;
U_2 = Gangzeit einer Uhr mit Bandkette;
U_3 = Gangzeit einer Uhr mit Schnurtrommel (Walze);
h = Fallhöhe in Metern;
k = Anzahl der Kettenglieder pro Meter;
x = Anzahl der Teile des Kettenrades (der Zacken oder Vorsprünge);
d = wirksamer Durchmesser der Trommel (Walze);
l = wirksame Länge der Trommel;
s = Schnurstärke;
u = Zeit einer Umdrehung des Antriebrades (des Kettenrades oder der Schnurtrommel).

I. Gesucht die Gangzeit U_1 (einer Uhr mit Ringkette)

Ist der Kettenstern x-teilig, d. h. hat das Kettenrad x Zacken (oder Vorsprünge anderer Art), so

*) Die Gangzeit einer Uhr, in Stunden ausgedrückt, ist natürlich gleich der Umdrehungszahl U der Minutenradswelle bzw. des Viertelrohres, also gleich der Anzahl der Umdrehungen des Minutenzeigers in dieser Zeit. Wir bezeichnen sie deshalb mit U, aber wegen besserer Unterscheidung der abweichenden Formeln für Ringketten-, Bandketten- und Schnurtrommelbetrieb mit U_1, U_2 und U_3.

wickeln sich bei einer Umdrehung u des Kettenrades $2 . x$ Kettenglieder ab. Gehen nun auf den Meter k Kettenglieder und beträgt die Fallhöhe h Meter, so kommen auf die ganze Fallhöhe $h . k$ Kettenglieder. Hängt das Gewicht direkt an der Kette, was meist der Fall ist, so mufs, wenn das Gewicht die Fallhöhe h durchläuft, das Kettenrad sich $\frac{h . k}{2 x}$ mal umdrehen. Aus der Anordnung der Uhr ersehen wir, in welcher Zeit das Kettenrad und mithin die Antriebswelle eine Umdrehung macht. Bezeichnen wir diese Umdrehungszeit (in Stunden ausgedrückt) mit u, so beträgt die Gangzeit der Uhr

$$U_1 = \frac{k . h . u}{2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Zahlenbeispiel. Bei einer Wanduhr sitzt (wie gewöhnlich) das Wechselrad auf der Antriebwelle. Es hat 36 Zähne, das Viertelrohr 24. Sonach dreht sich letzteres bei einem Umgang der Antriebswelle $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ mal, d. h. also das Kettenrad braucht zu einer Umdrehung drei halbe oder 1,5 Stunden. Ist nun der Kettenstern $x = 6$ teilig, gehen $k = 150$ Glieder auf 1 m und beträgt die Fallhöhe $h = 1{,}6$ m, so ist die Gangzeit der Uhr nach Formel 11):

$$U_1 = \frac{150 . 1{,}6 . 1{,}5}{2 . 6} = 30 \text{ Stunden.}$$

II. Gesucht die Gangzeit U_2 (einer Uhr mit Bandkette)

Die Gangzeit einer Uhr mit Bandkette ergibt sich ebenfalls aus Gleichung 11), wenn man dabei berücksichtigt, dafs von der Bandkette bei einer Umdrehung des Kettenrades nur ebensoviele Glieder abgewickelt werden, als das Kettenrad Vorsprünge hat; somit beträgt die Gangzeit

$$U_2 = \frac{k . h . u}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Zahlenbeispiel. Ist das Kettenrad $x = 11$ teilig, gehen $k = 101$ Glieder auf 1 m, beträgt die

Fallhöhe $h = 1{,}8$ m und ist die Zeit für eine Umdrehung des Kettenrades $u = 12$ Stunden, so beträgt die Gangzeit der Uhr:

$$U_2 = \frac{101 \cdot 1{,}8 \cdot 12}{11} = 198{,}3 \text{ Stunden} = 8 \text{ Tage und}$$

6,3 Stunden.

Anmerkung 12. Sollte, was zwar sehr selten vorkommt, das Gewicht nicht direkt, sondern vermittels einer losen Rolle an der Kette hängen, so sind die Gangzeiten doppelt so grofs, und hängt das Gewicht an einem 4rolligen Flaschenzuge, so sind die Gangzeiten 4 mal so grofs, als Formel 11) und 12) angeben.

III. Gesucht die Gangzeit U_3 (einer Uhr mit Schnurtrommel)

Ist d der wirksame Durchmesser der Trommel, d. i. der wirkliche Durchmesser, vermehrt um die Schnurstärke, so wickeln sich bei einer Umdrehung der Trommel $d \cdot \pi$ Längeneinheiten der Schnur ab;*) bei der Fallhöhe von h Längeneinheiten mufs sich die Trommel $\frac{h}{d \cdot \pi}$ mal umdrehen, wenn das Gewicht direkt an der Schnur hängend die ganze Fallhöhe h durchläuft; beträgt nun die Zeit für eine Umdrehung der Trommel u Zeiteinheiten, so ist die Gangzeit der Uhr

$$U_3 = \frac{h \cdot u}{d \cdot \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Da jedoch bei Schnurtrommeln das Gewicht meist an einer sogenannten losen Rolle hängt, so ist die Gangzeit dann

$$U_3 = \frac{2h \cdot u}{d \cdot \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

und für den Fall, dafs das Gewicht an einem 4rolligen Flaschenzuge hängt, ist die Gangzeit

---

*) Es darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden, dafs der oben eingesetzte griechische Buchstabe π (sprich: pi) die Zahl 3,14 bedeutet, durch welche man den Umfang eines Kreises ermittelt, wenn man seinen Durchmesser mit ihr multipliziert.

$$U_3 = \frac{4\,h\,.\,u}{d\,.\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 15)$$

Zahlenbeispiel. Beträgt der wirksame Trommeldurchmesser $d = 5$ cm, die Fallhöhe $h = 1{,}3$ m oder 130 cm und die Zeit für eine Umdrehung der Trommel $u = 12$ Stunden, so ist die Gangzeit U_3, wenn das Gewicht an einer losen Rolle hängt, nach Formel 14):

$$U_3 = \frac{2\,.\,130\,.\,12}{5\,.\,3{,}14} = 198{,}7 \text{ Stunden} = 8 \text{ Tage}$$

und 6,7 Stunden.

IV. Gesucht die Fallhöhe des Gewichts

a) an einfacher Ringkette

$$h = \frac{2\,x\,.\,U_1}{k\,.\,u} \quad \ldots\ldots\ldots\ 16)$$

b) an der Bandkette

$$h = \frac{x\,.\,U_2}{k\,.\,u} \quad \ldots\ldots\ldots\ 17)$$

c) an der Schnurtrommel

$$h = \frac{d\,.\,\pi\,.\,U_3}{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ 18)$$

Anmerkung 13. Hängt das Gewicht an einer losen Rolle, so ist die Fallhöhe h um die Hälfte kleiner, hängt es an einem 4rolligen Flaschenzuge, so ist h um den vierten Teil kleiner, als die Formel angibt; also z. B. $h = \frac{d\,.\,\pi\,.\,U_3}{u} \,.\, \frac{1}{2}$ oder $h = \frac{d\,.\,\pi\,.\,U_3}{u} \,.\, \frac{1}{4}$

Zahlenbeispiel. Zu einem 8-Tage-Hausuhrwerk mit einfacher Ringkette, von der 143 Glieder auf 1 m gehen, und mit einem 7teiligen Kettenrad, das sich in $13^1/_3$ Stunden einmal herumdreht, soll ein Gehäuse gefertigt werden. Wie grofs mufs der Fallraum für das Gewicht sein, wenn dieses 25 cm hoch ist? Hier dient Formel 16), wonach

die Fallhöhe $h = \frac{2\,.\,7\,.\,8\,.\,24}{143\,.\,13{,}33} = 1{,}4$ m,

wozu noch die Höhe des Gewichts $= 0{,}25$ „ addiert werden mufs, so dafs in Summa 1,65 m Raum für den Weg des Gewichts bei 8 . 24 Stunden Gangzeit der Uhr allermindestens freizulassen ist.

V. Gesucht die Länge l der Schnurtrommel

Ist l die wirksame Länge der Trommel und s die Stärke der Schnur, so kann sich die Trommel überhaupt nur $\frac{l}{s}$ mal umdrehen, woraus folgt:

$$l = \frac{h \cdot s}{d \cdot \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

Hängt das Gewicht an einer losen Rolle, so ist die Trommellänge

$$l = \frac{2h \cdot s}{d \cdot \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

und hängt es an einem 4rolligen Flaschenzug, so ist die Länge

$$l = \frac{4h \cdot s}{d \cdot \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

Anmerkung 14. Bei Vergleich der Formeln 13), 14), 15) mit 19), 20) und 21) ergibt sich sofort, dafs

$$\frac{l}{s} = \frac{U}{u},$$

d. h. in allen Fällen verhält sich die Länge l der Trommel zur Stärke s der Schnur, wie die Gangzeit U der Uhr zu der Zeit u für eine Umdrehung der Trommel.

Hiermit lassen sich 4 Aufgaben lösen; man kann l, s, u oder U berechnen, wenn die drei übrigen Gröfsen bekannt sind. Mithin läfst sich die Trommellänge auch berechnen durch:

$$l = \frac{U_3 \cdot s}{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

Zahlenbeispiel. Es beträgt die Gangzeit einer Uhr mit Schnurtrommel $U_3 = 8$ Tage $= 192$ Stunden, die Zeit u für eine Trommelumdrehung $= 16$ Stunden und die Schnurstärke $s = 2$ mm. Wie grofs mufs die wirksame Länge der Trommel sein? Nach Formel 22) ist

$$l = \frac{192 \cdot 2}{16} = 24 \text{ mm}.$$

Aus der Gleichung $\frac{l}{s} = \frac{U}{u}$ ergibt sich wie gesagt noch die Lösung für die anderen drei (in Anmerkung 14 genannten) Aufgaben:

VI. Gesucht die Zeit u für eine Umdrehung der Schnurtrommel

$$u = \frac{U_3 \cdot s}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

VII. Gesucht die Gangzeit U_3

$$U_3 = \frac{l \cdot u}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

VIII. Gesucht die Schnurstärke s

$$s = \frac{l \cdot u}{U_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

C. Bestimmung der Rad- und Triebgrößen

Vorbemerkung

Bei unseren Radverzahnungen wird die Zahnstärke sowohl der Lückenbreite als auch der Wälzungshöhe gleich gerechnet. Das ist zwar nicht absolut richtig, aber angesichts der geringen Differenzen belanglos und wegen der Vereinfachung der Berechnungen praktisch. Der Kreis, welcher durch die Anfangspunkte der Wälzungsbogen hindurch gelegt werden kann, wird bekanntlich der Grundkreis oder Teilkreis genannt, sein Durchmesser heifst der wirksame, im Gegensatz zum vollen, d. h. zum Durchmesser des etwas gröfseren Kreises, welcher durch die Spitzen der Zähne geht. Der Raum, den eine Zahnstärke und eine Lückenbreite auf dem Teilkreise einnimmt, heifst die Teilung. Da Zahnstärke und Lückenbreite an Rädern gleiche Gröfsen sind, so kann man auch sagen: die Teilung ist gleich 2 Zahnstärken des Rades, oder umgekehrt: die Zahnstärke eines Rades ist gleich der Hälfte der Teilung. Da ferner auch die Höhe der Wälzungsbogen an den Radzähnen gleich deren Zahnstärke ist, der wirksame Durchmesser aber nur bis zu den gegenseitigen Anfangspunkten der Wälzungsbogen reicht, so geht daraus hervor, dafs der wirksame Durchmesser um 2 Zahnstärken oder um die Teilung kleiner ist, als der volle, oder umgekehrt: der volle Durchmesser ist um die Teilung gröfser als der wirksame.

Weniger einfach liegen diese Verhältnisse bei den Trieben. Zunächst ist hier zu unterscheiden zwischen Trieben mit weniger als 10 Zähnen und solchen mit 10 und mehr als 10 Zähnen. Bei Trieben mit weniger als 10 Zähnen verhält sich die Zahnstärke zur Lückenbreite wie 1 : 2; die Zahnstärke beträgt hier also nur $^1/_3$ Teilung. Bei Trieben mit 10 und mehr als 10 Zähnen verhält sich die Zahnstärke zur Lückenbreite wie 2 : 3; die Zahnstärke ist sonach gleich $^2/_5$ Teilung. Ferner haben wir bei den Trieben aufser der meist üblichen runden Wälzung noch eine spitze Wälzung. Bei der runden endet der Triebzahn halbkreisförmig, wobei der Mittelpunkt des Wälzungsbogens auf dem Teilkreise liegt; daher beträgt die Höhe der runden Wälzung genau eine halbe Zahnstärke und der volle Triebdurchmesser ist hier um eine volle Zahnstärke gröfser als der wirksame. Bei der spitzen Wälzung endet der Triebzahn spitzbogenförmig, wobei als zweckmäfsige Höhe dieses Spitzbogens $^3/_4$ der Zahnstärke gilt; hieraus ergibt sich, dafs der volle Durchmesser eines solchen Triebes um $^6/_4 = 1\,^1/_2$ Zahnstärke gröfser ist als der wirksame.

Wenn zwei Räder oder Rad und Trieb ineinander greifen, so ist es Grundbedingung, dafs die Teilung beider ganz gleich ist. Hieraus folgt, dafs ein Rad, das 2, 3 oder *n* mal soviele Zähne hat als ein anderes, auch einen 2, 3 oder *n* mal so grofsen Umfang oder Durchmesser des Teilkreises haben mufs als jenes. Ganz allgemein verhalten sich also die wirksamen Durchmesser von Rad und Trieb wie deren Zahnzahlen.

Auf diesen Grundsätzen beruhen die folgenden Formeln, für welche nachstehende Bezeichnungen gelten.

Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l} D = \text{voller Durchmesser} \\ d = \text{wirksamer Durchmesser} \\ n = \text{Zahnzahl} \\ Z = \text{Zahnstärke } (= \text{Fräsenstärke}) \end{array}\right\} \text{des Rades.}$$

s = Teilung

z = Zahnstärke des Triebes.

T = voller Triebdurchmesser, und zwar:

T_1 = voller Durchm. eines rundgewälzten Triebes mit weniger als 10 Zähnen;

T_2 = voller Durchm. eines rundgewälzten Triebes mit 10 oder mehr als 10 Zähnen;

T_3 = voller Durchm. eines spitzgewälzten Triebes mit weniger als 10 Zähnen;

T_4 = voller Durchm. eines spitzgewälzten Triebes mit 10 oder mehr als 10 Zähnen;

T_5 = voller Durchm. eines führenden Triebes.

t = wirksamer Triebdurchmesser.

m = Zahnzahl des Triebes.

E = Eingriffsweite.

1. Gröſsenverhältnisse am Rad und Trieb

I. Gesucht die Teilung s

a) aus dem wirksamen Raddurchmesser d und der Radzahnzahl n

$$s = \frac{d \cdot \pi}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

b) aus dem vollen Raddurchmesser D und der Radzahnzahl n:

$$s = \frac{D \cdot \pi}{n + \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

c) aus dem wirksamen Triebdurchmesser t und der Triebzahnzahl m

$$s = \frac{t \cdot \pi}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

II. Gesucht die Zahnstärke (= Fräsenstärke) Z des Rades aus der Teilung s

$$Z = \frac{s}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

III. Gesucht die Zahnstärke z des Triebes aus der Teilung s

a) für Triebe mit 6 bis 9 Zähnen

$$z = \tfrac{1}{3}\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

b) für Triebe mit 10 und mehr als 10 Zähnen sowie für führende Triebe

$$z = 0{,}4\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

Zahlenbeispiele. 1) Wie stark mufs die Fräse gewählt werden für ein Rad mit 60 Zähnen, dessen voller Durchmesser 10,1 mm beträgt?

Nach Formel 29) ist die Zahn- oder Fräsenstärke $= \tfrac{1}{2}\, s =$ der halben Teilung; wir müssen also erst die Teilung s ermitteln. Sie ist nach Formel 27) in unserm Falle $= \dfrac{10{,}1 \,.\, 3{,}14}{63{,}14} = 0{,}5$ mm. Mithin ist die gesuchte Zahn- oder Fräsenstärke $Z = 0{,}25$ mm.

2) Wir wollen die Zahnstärke eines rundgewälzten Triebes mit 8 Zähnen nachprüfen, dessen voller Durchmesser $= 3$ mm ist.

Der Fall ist etwas verwickelter. Nach Formel 30) ist die Zahnstärke $z = \tfrac{1}{3}\, s$, d. h. gleich dem dritten Teil der Teilung. Wir müssen also erst die Teilung berechnen und brauchen nach Formel 28) hierzu wieder den wirksamen Triebdurchmesser t. Wir finden ihn nach Formel 43) aus dem vollen Triebdurchmesser (der dort mit T_1 bezeichnet ist) und aus der Triebzahnzahl m durch

$$t = \frac{3\, m \,.\, T_1}{3\, m + \pi} = \frac{3 \,.\, 8 \,.\, 3}{3 \,.\, 8 + 3{,}14} = \frac{72}{27{,}14} = 2{,}653.$$

$$\text{Mithin ist } s = \frac{2{,}653 \,.\, 3{,}14}{8} = 1{,}041 \text{ und}$$

$$z = \frac{1{,}041}{3} = 0{,}347.$$

Wir haben hier genauer (abgerundet bis auf 3 Dezimalstellen) gerechnet, weil wir zugleich eine Probe auf die Richtigkeit des Exempels machen wollten. Wie wir aus der Vorbemerkung wissen, ist der volle Triebdurchmesser in diesem Falle gerade um eine Zahnstärke größer als der wirksame. Das müßte sich also auch aus unserer Rechnung ergeben. In der Tat ist hier $2{,}653 + 0{,}347 = 3$.

IV. Gesucht der wirksame Raddurchmesser d

a) aus dem vollen Raddurchmesser D und der Radzahnzahl n

$$d = \frac{D \,.\, n}{n + \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 32)$$

b) aus dem vollen Raddurchmesser D und der Teilung s

$$d = D - s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

c) aus der Radzahnzahl n und der Teilung s

$$d = \frac{n \,.\, s}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Zahlenbeispiel. Wie groß ist der wirksame Durchmesser eines Rades mit 64 Zähnen, dessen voller Durchmesser 24,6 mm beträgt?

Rechnen wir nach Formel 32), so ergibt sich der wirksame Durchmesser

$$d = \frac{24{,}6 \,.\, 64}{64 + 3{,}14} = \frac{1574{,}4}{67{,}14} = 23{,}45 \text{ (abgerundet).}$$

Wir können aber auch nach Formel 33) rechnen, indem wir zuerst (nach Formel 27) die Teilung s ermitteln:

$$s = \frac{24{,}6 \,.\, 3{,}14}{64 + 3{,}14} = \frac{77{,}244}{67{,}14} = 1{,}15 \text{ (abgerundet).}$$

Dann ist $d = 24{,}6 - 1{,}15 = 23{,}45$ wie oben.

V. Gesucht der volle Raddurchmesser D

a) aus dem wirksamen Raddurchmesser d und der Radzahnzahl n

$$D = d\left(1 + \frac{\pi}{n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

b) aus dem wirksamen Raddurchmesser d und der Teilung s

$$D = d + s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

Zahlenbeispiel. Wie groß ist der volle Durchmesser eines Rades mit 64 Zähnen, dessen wirksamer Durchmesser 14,6 mm beträgt?

Hier liegt der Fall ähnlich wie beim vorigen Zahlenbeispiel. Rechnen wir nach Formel 35), so ist

$$D = 14.6, \left(1 + \frac{3,14}{64}\right) = 14,6 . 1,049 = 15,315 \text{ oder auf}$$

2 Dezimalstellen abgerundet: 15,32.*)

Rechnen wir aber nach Formel 36), so ist erst die Teilung s nach Formel 26) zu ermitteln, nämlich

$$s = \frac{14.6 . 3,14}{64} = 0,72, \text{ und dann nach Formel 36)}$$

einfach zu addieren: 14,6+0,72, wonach wir $D = 15,32$ erhalten wie oben.

VI. Gesucht der volle Triebdurchmesser T aus dem wirksamen Triebdurchmesser t und der Triebzahnzahl m)**

1) T_1 für rundgewälzte Triebe mit 6 bis 9 Zähnen:

$$T_1 = t + {}^1\!/_3\, s \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 37)$$

2) T_2 für rundgewälzte Triebe mit 10 und mehr als 10 Zähnen:

$$T_2 = t + 0,4\, s \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 38)$$

3) T_3 für spitzgewälzte Triebe mit 6 bis 9 Zähnen:

$$T_3 = t + 0,5\, s \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 39)$$

4) T_4 für spitzgewälzte Triebe mit 10 und mehr als 10 Zähnen:

$$T_4 = t + 0,6\, s \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 40)$$

5) T_5 für führende Triebe:

$$T_5 = t + 0,8\, s \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 41)$$

---

*) Wem die Bedeutung der Klammern als Rechnungsvorschrift unbekannt ist, der wird aus obigem Beispiel leicht erkennen, dafs hierdurch angeordnet wird, den eingeschlossenen Teil der Rechenaufgabe zunächst für sich zu erledigen. Ohne Klammern könnte man z. B. oben $14,6 \times 1$ lesen und hierzu dann den Quotient $\frac{3,14}{64} = 0,049$ addieren, während durch die Klammern klargestellt ist, dafs man die 1 zu 0,049 zählen und die so erhaltene Summe mit 14,6 multiplizieren mufs.

**) Es bedarf wohl kaum noch des Hinweises, dafs hier ähnlich wie in früheren Fällen die Teilung des Triebes erst (nach Formel 28) ermittelt werden mufs, um die Formeln 37 bis 41 benutzen zu können.

VII. Gesucht der wirksame Triebdurchmesser t

a) aus der Teilung s und der Triebzahnzahl m

$$t = \frac{m \,.\, s}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

b) aus dem vollen Triebdurchmesser T und der Triebzahnzahl m

1) für rundgewälzte Triebe mit 6 bis 9 Zähnen:

$$t = \frac{3\,m \,.\, T_1}{3\,m + \pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

2) für rundgewälzte Triebe mit 10 und mehr als 10 Zähnen:

$$t = \frac{5\,m \,.\, T_2}{5\,m + 2\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

3) für spitzgewälzte Triebe mit 6 bis 9 Zähnen:

$$t = \frac{2\,m \,.\, T_3}{2\,m + \pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

4) für spitzgewälzte Triebe mit 10 oder mehr als 10 Zähnen:

$$t = \frac{5\,m \,.\, T_4}{5\,m + 3\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

5) für führende Triebe:

$$t = \frac{5\,m \,.\, T_5}{5\,m + 4\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

Zahlenbeispiele: Der volle Durchmesser eines rundgewälzten Triebes mit 10 Zähnen ist 3,25 mm. Wie grofs ist der wirksame Durchmesser?

Hier gilt Formel 44). Nach ihr rechnen wir:

$$t = \frac{5\,m \,.\, T_2}{5\,m + 2\,\pi} = \frac{50 \,.\, 3{,}25}{56{,}28} = 2{,}89.$$

2. Gröfsenverhältnisse zwischen Rad und Trieb

I. Gesucht zum wirksamen Raddurchmesser d und zu den Zahnzahlen n und m der wirksame Triebdurchmesser t

$$t = \frac{d \,.\, m}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

II. Gesucht zum wirksamen Triebdurchmesser t und zu den Zahnzahlen n und m der wirksame Raddurchmesser d

$$d = \frac{t \cdot n}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

(Wo die vollen Durchmesser gegeben sind, berechnet man natürlich hieraus erst die wirksamen nach Formel 32) oder 33) bzw. 43) usw.)

3. Gröſsenverhältnisse von Rad und Trieb zur Eingriffsweite

I. Gesucht der wirksame Raddurchmesser d aus der Eingriffsweite E und der Rad- und Triebzahnzahl n und m

$$d = \frac{2n \cdot E}{n + m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

II. Gesucht der wirksame Triebdurchmesser t aus der Eingriffsweite E und der Rad- und Triebzahnzahl n und m

$$t = \frac{2m \cdot E}{n + m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Zahlenbeispiel. Für eine Eingriffsweite = 26,4 mm den wirksamen Durchmesser eines Rades mit 84 und eines Triebes mit 12 Zähnen zu bestimmen.

Hier ist zunächst $d = \frac{168 \cdot 26,4}{96} = 46,2$

und ferner $t = \frac{24 \cdot 26,4}{96} = 6,6.$

Wir werden auf die Richtigkeit dieses Exempels noch eine Probe machen auf Grund der nachfolgenden Formel 52).

III. Gesucht die Eingriffsweite aus den wirksamen Rad- und Triebdurchmessern d und t

$$E = \frac{d + t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

Wie wir schon Seite 10 erörtert haben und aus der vorstehenden Formel hervorgeht, setzt sich die

Eingriffsweite aus den beiden wirksamen Halbmessern von Rad und Trieb zusammen. Wenn also die Rechnung im letzten Zahlenbeispiel richtig ist, so müssen die beiden ermittelten Durchmesser zusammen die doppelte Eingriffsweite ergeben. In der Tat ist

$$46{,}2 + 6{,}6 = 52{,}8 \text{ oder } 2 . 26{,}4,$$

welche Gröſse im Beispiel als Eingriffsweite gegeben war.

4. Gröſsenverhältnisse zwischen dem wirklichen (vollen) und meſsbaren („gemessenen") Durchmesser bei Trieben mit ungerader Zahnzahl

Anmerkung 15. An Trieben mit ungerader Zahnzahl läſst sich der Durchmesser natürlich nicht direkt mit einem Schieb- oder Tastenmaſse messen, denn nur die eine Backe kann an der Peripherie, d. h. über eine Zahnspitze des Triebes angelegt werden, die andere miſst dabei über die gegenüber stehende Lücke, mithin eine etwas zu geringe Gröſse, die man den „gemessenen Durchmesser" zu nennen pflegt und die wir hier mit M bezeichnen wollen. Man findet sie durch Multiplikation des wirklichen (vollen) Durchmessers (T) mit folgenden Verhältniszahlen. Es ist

a) beim 7er Trieb $M = T . 0{,}95$;
b) beim 9er oder 11er Trieb $M = T . 0{,}97$;
c) beim 13er oder 15er Trieb $M = T . 0{,}99$.

Zahlenbeispiel. Wir berechneten für ein verlorenes 7er Trieb den vollen Durchmesser = 1,5 mm. Wie groſs ist der „gemessene" Durchmesser?

$$\text{Nach a)} = 1{,}5 . 0{,}95 = 1{,}4.$$

Hiernach können wir das Trieb mittels des Schiebmaſses oder Mikrometers durch Messen über eine Zahnspitze und die gegenüber liegende Lücke in der Gröſse von 1,4 mm aussuchen und werden dann ein solches erhalten, das tatsächlich den vollen Durchmesser = 1,5 besitzt.

Übersichtstafel der vorstehenden Aufgaben und Lösungen

A. Räderwerksberechnung

(Buchstabenbezeichnung siehe Seite 18)

1. Berechnungen vom Minutenrad bis zum Gangrad

Aufgabe: Gegeben ist:	Gesucht wird:	Seite	Lösung: Nr. der Formel	Nr. der Anmerkg.
A, B, C und a, b, c	U	18	1	s. Vorbemerkg.
S und N	U	19	2	
A, B, C, N und a, b, c	S	19	3	
U und N	S	19	4	
$B, C, a, b, c,$ und U	A	19	5	—
A, B, C, b, c und U	a	20	6	—
B, C, b, c und U	A und a	20	7	1
S und a, b, c	$A, B. C, N$	22	8	2 u. 3
U und a, b, c	A, B, C	24	9	4

2. Berechnungen vom Antriebrad bis zum Minutentrieb

Gegeben ist:	Gesucht wird:	Seite	Nr. der Formel	Nr. der Anmerkg.
U und a	A	24	(5)	5; 1)
U, a und b	A und B	25 u. 26	(9)	5; 2)
A, B, a, b und U	u	26	10	6

3. Berechnung der Zeigerwerke

Gegeben ist:	Gesucht wird:	Seite	Nr. der Formel	Nr. der Anmerkg.
U, a und b	A und B	27	(9)	7 u. 8
B, a, b und U	A	29	(5)	9
B, b und U	A und a	29	(7)	10

(Siehe auch Anmerkung 11, Seite 23.)

B. Berechnung der Gangzeit von Gewichtsuhren und verwandte Aufgaben über Fallhöhe Walzenlänge usw.

(Buchstabenbezeichnung s. Seite 30)

Aufgabe:			Lösung: Nr. der	
Gegeben ist:	Gesucht wird:	Seite	Formel	Anmerkg.
h, k, x und u	U_1	30	11	
h, k, x und u	U_2	31	12	12
h, d, und u	U_3	32 u. 33	13, 14, 15	
U_1, u, x und k	h	33	16	
U_2. u, x und k	h	33	17	
U_3, u und d	h	33	18	13
h, s und d	l	34	19, 20, 21	
U_3, u, und s	l	34	22	14
U_3. l und s	u	35	23	
u, l und s	U_3	35	24	
U_3, u und l	s	35	25	

C. Bestimmung der Rad- und Triebgröfsen

(Buchstabenbezeichnung siehe Seite 37)

1. Gröfsenverhältnisse am Rad und Trieb

Gegeben ist:	Gesucht wird:	Seite	Nr. der Formel
d und n	s	37	26
D und n	s	37	27
t und m	s	37	28
s	Z	37	29
s ($m = 6$ bis 9)	z	38	30
s ($m = 10$ und darüber)	z	38	31
D und n	d	39	32
D und s	d	39	33
n und s	d	39	34
d und n	D	39	35
d und s	D	39	36
t und m	T_1	40	37
t und m	T_2	40	38

Gegeben ist:	Gesucht wird:	Seite	Nr. der Formel
t und m	T_3	40	39
t und m	T_4	40	40
t und m	T_5	40	41
s und m	t	41	42
T_1 und m	t	41	43
T_2 und m	t	41	44
T_3 und m	t	41	45
T_4 und m	t	41	46
T_5 und m	t	42	47

2. Gröſsenverhältnisse zwischen Rad und Trieb

Gegeben ist:	Gesucht wird:	Seite	Nr. der Formel
d, n und m	t	41	48
t, m und n	d	42	49

(Wenn die vollen Durchmesser gegeben sind, siehe zuvor Formel Nr. 32 bzw. 43 bis 47)

3. Gröſsenverhältnisse von Rad und Trieb zur Eingriffsweite

Gegeben ist:	Gesucht wird:	Seite	Nr. der Formel
E, n und m	d	42	50
E, n und m	t	42	51
d und t	E	42	52

4. Gröſsenverhältnisse zwischen dem wirklichen und dem gemesseneu Durchmesser bei Trieben mit ungerader Zahnzahl

siehe Seite 43.