Die Gründe der Überlegenheit des Sekundenpendels

Von Prof. Dr.-Ing. H. Bock

In Nr. 31 der Deutschen Uhrmacher-Zeitung behandelt Regierungsrat Irk im Anschluß an die Besprechungen in der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhren-Technik die Frage des Halbsekundenpendels und gibt dabei einen interessanten Hinweis auf die vermutlichen Ursachen seiner mangelhaften Funktion, die darin zum Ausdruck kommt, daß nach Prof. Wanach etwa ein Dutzend benötigt werden, wenn man dieselbe Schärfe der Zeitangabe erreichen will, wie sie ein Sekundenpendel liefert.

Nach Irk sind diese Ursachen einzig und allein im Pendel selbst bezw. im Uhrwerk zu suchen. Das hat man schon oft behauptet, ohne jedoch über die näheren Umstände etwas Genaueres auszusagen. Im folgenden sollen nun einige Zusammenhänge besprochen werden, die auf das Problem Bezug haben und die zugleich zu begreifen gestatten, weshalb auch die ganz langen Pendel, die länger als eine Sekunde schwingen, es nach den mit ihnen gemachten Erfahrungen mit dem normalen Sekundenpendel nicht aufzunehmen vermögen.

Man denke sich im Besitze zweier verschieden langen Pendel befindlich, die einander „geometrisch ähnlich" sind. Was das heißt, ist leicht zu sagen: man übergebe die Konstruktionszeichnung des Pendels mit eingeschriebenen Maßzahlen zwei verschiedenen Fabrikanten und sage zu dem einen, die Zahlen bedeuteten Zentimeter, dem anderen aber, es seien Zoll gemeint. Dann entstehen zwei verschieden große Pendel, die geometrisch, d. h. in ihrer äußeren Gestalt, einander so ähnlich sind, wie etwa zwei Würfel oder Kugeln.

Nun fragt sich zunächst, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn die Luftbewegungen um die beiden Pendel ebenfalls in geometrisch ähnlichen Bahnen verlaufen sollen. Hierüber gibt das jedem Flugzeugingenieur bekannte Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz erschöpfend Auskunft. Ohne Beweis sei angegeben, daß die Übereinstimmung der beiden Luftströmungen dann eintritt, wenn sich die Pendellängen l umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Bahnlängen der Linsen b:

$$l_1 : l_2 = b_2^2 : b_1^2.$$

Denkt man bei den Werten 1 bezw. 2 an ein Sekunden- bezw. ein Halbsekundenpendel, so verhält sich bekanntermaßen:

$$l_1 : l_2 = 4 : 1, \text{ und damit wird:}$$
$$b_2 : b_1 = \sqrt{4} : \sqrt{1} = 2 : 1. \qquad (1)$$

Das Halbsekundenpendel müßte somit die doppelte Linsenschwungweite bekommen, wenn die Luftbewegung um beide herum in gleichartiger Weise ablaufen sollte. Das wird freilich in Wirklichkeit kaum der Fall sein, und wir erkennen bereits einen ersten Unterschied in dem Bewegungsmechanismus der beiden. Wäre es aber der Fall, so ließen sich jetzt auch die Luftdruckunterschiede vor und hinter der Linse der beiden miteinander vergleichen. Nach Betrachtungen, die uns hier nichts weiter angehen, würden sich diese für den Widerstand der Luft in erster Linie maßgeblichen Druckdifferenzen verhalten wie:

$$\frac{b_1}{\sqrt{l_1^3}} : \frac{b_2}{\sqrt{l_2^3}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} : \frac{2}{1} = 1 : 16. \qquad (2)$$

Das geometrisch ähnliche Halbsekundenpendel hätte demnach 16mal mehr Luftwiderstand zu überwinden als sein viermal längerer Genosse, was eine weit stärkere, mit stärkeren Störungen verbundene Energiezufuhr durch das Uhrwerk erfordern würde. In Wirklichkeit ist die Sachlage natürlich viel weniger ungünstig, da man Halbsekundenpendel mit so langen Schwungbahnen kaum bauen wird.

Da nun die Bedingung (1) nicht erfüllt ist, so hört die Giltigkeit dieser Überlegungen auf, und wir müssen andere Wege beschreiten. Dabei wird sich mit ziemlicher Deutlichkeit zeigen, worin die Ursachen zu erblicken sind, die dem Sekundenpendel gegenüber den kürzeren oder auch längeren Genossen eine erhebliche Überlegenheit verleihen, die die Praxis ja auch ohne Kenntnis der tieferen Gründe längst erkannt und sich zunutze gemacht hat.

Man denke sich zunächst eine Pendeluhr, bei der der Antrieb des Pendels durch die Hemmung in so idealer Weise geleistet wird, daß die Energieverluste durch Reibung, elastische Federnachwirkung und Luftwiderstand stets augenblicklich ausgeglichen werden. Dann würde das Pendel so schwingen, als ob Antrieb und Widerstände überhaupt nicht vorhanden wären. Die Schwungweite und damit die Schwingungsdauer würde andauernd dieselbe bleiben, und man dürfte die Linsenbewegung durch das in der Abbildung 1 dargestellte Diagramm beschreiben, auf dessen nähere Begründung wir hier verzichten, da es ja ziemlich bekannt ist. $A\ B$ bedeutet die Schwingungsbahn; nachdem die Linse, von rechts nach links wandernd, bis zum Punkt C gelangt ist, ist seit dem Aufbruche aus A eine Zeit t vergangen, die durch die Stellung des — hier freilich verkehrt herumlaufenden — Zeigers $O\ D$ gekennzeichnet wird. Dabei bedeutet, wie leicht einzusehen, eine Drehung des Zeigers um den halben Umfang herum, also von A über E nach B, offenbar die Dauer T einer ganzen Schwingung. Es gilt also die Proportion:

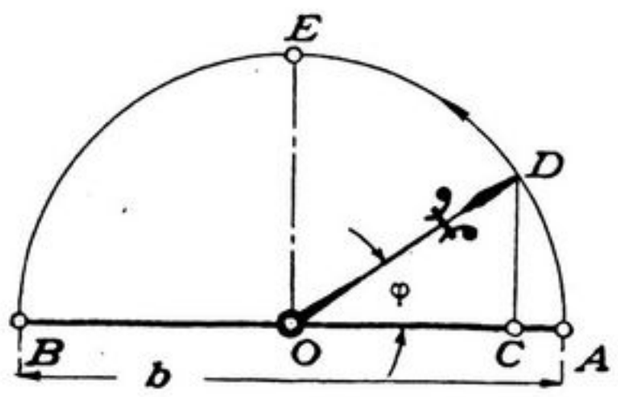

Abb. 1

$$t : T = \varphi : \pi,$$

denn π ist die Bezeichnung für 180° im Bogenmaß (eine Bogeneinheit gleich $\frac{180}{\pi}$ oder 57,3 Bogengrade). Also ist nach dem Proportionsgesetz „Produkt der äußeren gleich dem der inneren Glieder":

$$t \cdot \pi = T \cdot \varphi \text{ oder}$$
$$t = \frac{T}{\pi} \cdot \varphi. \qquad (3)$$

Das bedeutet, daß man den im Bogenmaß gemessenen Winkel φ mit $\frac{T}{\pi}$ multiplizieren muß, wenn man die Zeit in Sekunden haben will, die von der Linse für die Bahnstrecke $A\ C$ gebraucht wird. Das Diagramm gestattet aber noch mehr abzulesen: Die Strecke $C\ D$ ist ein Maß für die Geschwindigkeit, die die Linse im Bahnpunkte C besitzt. Der Maßstab, in dem CD zu messen ist, ergibt sich daraus, daß

die Höchstgeschwindigkeit in der Bahnmitte, also OE, gleich $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{T}$ Metern pro Sekunde ist. b ist wieder die gesamte Schwungweite und T die Schwingungsdauer. — Nun zu den Störungen:

1. Regelmäßige, sogenannte „systematische" Störungen. Der Ablauf der Bewegung nach dem Diagramm der Abbildung 1 ist natürlich ein nicht erreichbarer Idealfall. In Wirklichkeit ist der Luftwiderstand in der Mitte am stärksten und nimmt nach dem Umkehrpunkte hin mit der Geschwindigkeit der Linse ab; die Energiezufuhr dagegen erfolgt beim Grahamgange auf dem Hebungsbogen, der dann plötzlich in den Ergänzungswinkel übergeht. Hierdurch entstehen Abweichungen der Bewegung von der Idealform, die sich freilich periodisch wiederholen und keinen Schaden bedeuten, solange sich weder Antriebskraft, noch Reibung usw. ändern.

2. „Zufällige" Störungen. Die eben genannten Änderungen aber lassen sich nicht vermeiden, auch nicht, wenn der Regleur seine Arbeit „bereits am Federhause" oder am Gewichtstriebe begonnen hat, und sie erfolgen in nicht vorauszusehender Weise, haben also den Charakter von „zufälligen Fehlern". Hier ist, der Auffassung von Prof. Irk entsprechend, die Ursache der Gangstörungen zu suchen, und daß diese beim kurzen Pendel besonders schlimm ausfallen müssen, soll jetzt plausibel gemacht werden.

Es ist durchaus recht und billig, wenn man voraussetzt, daß die zufälligen Störungsimpulse im Durchschnitt ungefähr der Antriebskraft annähernd proportional sind, ebenso wie etwa die unbeabsichtigten Erschütterungen, die eine Schiffsmaschine dem Fahrzeug erteilt, mit der Stärke der Maschine wachsen. Nun ist der Widerstand, den der Pendelkörper in der Luft erfährt, bei einer guten Hemmung größer als alle anderen Widerstände, und er wächst natürlich mit der Größe des von der Seite gesehenen Pendelquerschnitts, der bei ähnlichen Pendeln dem Quadrat ihrer Länge l proportional ist, weil die Dicke der Stange und Linse mit der Länge ebenfalls zunimmt. Weiter spielt die Geschwindigkeit der Bewegung eine große Rolle, die ja in der Mitte, wie wir eben gesehen haben, zu $\frac{b}{T}$ proportional ist. Bei ganz langsamer Bewegung ist der Widerstand ungefähr der Geschwindigkeit selbst proportional, bei sehr schneller aber ihrem Quadrat; wir schätzen also sicher nicht ganz schlecht, wenn wir hier weder $\frac{b}{T}$ selbst, noch $\left(\frac{b}{T}\right)^2$ als maßgeblich betrachten, sondern $\left(\frac{b}{T}\right)^{1,5}$. Demnach wäre also der Widerstand, den ein Pendel auf seiner Bahn zu überwinden hat, und der durch den Antrieb jedesmal ersetzt werden muß, proportional zu:

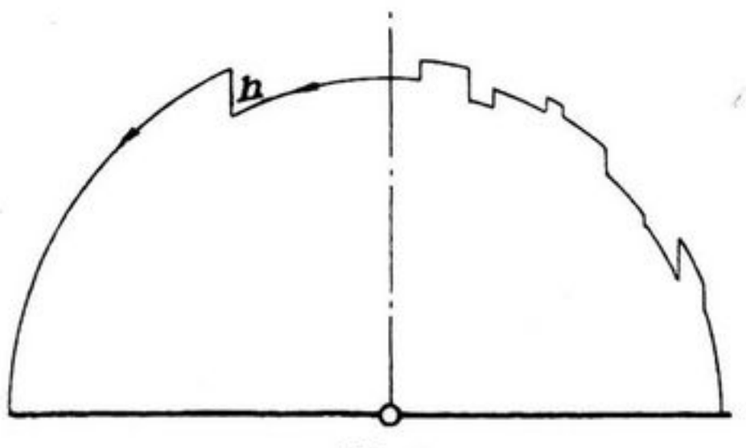

Abb. 2

$$l^2 \cdot \left(\frac{b}{T}\right)^{1,5} \sim l^2 \left(\frac{b}{\sqrt{l}}\right)^{1,5} \sim b^{3/2} \cdot l^{5/4}. \qquad (4)$$

Die Schwingungsdauer T ist nämlich bekanntermaßen der Wurzel aus der Länge, $\sqrt{l}$, proportional, $\sim$ ist das Proportionalitätszeichen.

Nach alledem darf man also sagen: die Störungsimpulse, die ein Pendel von der Länge l und der Schwungweite b durch die Mangelhaftigkeit des antreibenden Uhrwerkes zu erdulden hat, sind etwa zu $b^{3/2} \cdot l^{5/4}$ proportional.

Nun ist es allerdings die Frage, wie sich das Pendel gegenüber einem solchen Impulse verhält. Unter Impuls versteht man in der Mechanik zahlenmäßig die Geschwindigkeitsänderung irgendeiner Masse, multipliziert mit der Größe dieser Masse. So erfährt z. B. der Schlagball einen Impuls, wenn er vom Schläger getroffen wird; steigt dabei seine Geschwindigkeit von Null auf zwanzig Meter pro Sekunde, und wiegt er 0,2 kg, besitzt also eine Masse $\frac{0{,}2}{9{,}81} = 0{,}02$ (vergl. Deutsche Uhrmacher-Zeitung, Nr. 31, Seite 615, Jahrgang 1926), so hat der Schläger auf ihn einen Impuls von der Größe $20 \cdot 0{,}02 = 0{,}4$ übertragen, und Ursache dieses Impulses war die Kraft, die der Schläger auf den Ball während einer sehr kurzen Zeit ausgeübt hat.

Empfängt nun das Pendel durch die Hemmung einen Störungsimpuls, so ist eine plötzliche Veränderung seiner Geschwindigkeit die Folge, die sich im Diagramm durch eine in die Kreislinie eingeschaltete kleine senkrechte Strecke h (siehe Abb. 2, links) äußert. Treten viele solcher Störungen ein, so nimmt die Kreislinie eine unregelmäßige Form an, wie sie auf der rechten Seite der Abbildung 2 in stark übertriebener Weise zur Darstellung gebracht ist. Sie ist streng genommen eine „Treppe" aus sehr vielen kleinen Stufen h, die, zusammengenommen, zu einer unregelmäßigen Kurve verschmelzen.

Jetzt läßt sich wohl ohne weiteres behaupten: dasjenige Pendel ist das beste, bei dem die Treppenstufen h möglichst klein sind. Wir müssen also zunächst die Größe von h abschätzen. Das kann so geschehen: h steht im Diagramm der Abbildung 2 senkrecht und ist ebenso wie OE in der Abbildung 1 eine Geschwindigkeit v; dies v ergibt sich somit aus der Proportion:

$$v : \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{T} = h : \frac{b}{2}.$$

Denn OE repräsentiert die Geschwindidkeit $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{T}$ wie schon angegeben wurde. Also wird

$$v = \frac{\pi}{T} \cdot h. \tag{5}$$

Multipliziert man diese Geschwindigkeitsänderung v, die das Pendel erleidet, mit seiner Masse M, so bekommt man den Störungsimpuls, der nach unserer Annahme (vergl. die Gleichung 4) zu $b^{3/2} \cdot l^{5/4}$ proportional sein soll:

$$M \cdot \frac{\pi}{T} \cdot h \sim b^{3/2} \cdot l^{5/4}.$$

Da nun die Masse des Pendels zu seinem Volumen, also zu l^3, und T zu $\sqrt{l}$ proportional ist, so hat man schließlich:

$$m\, l^3 \cdot \frac{h}{\sqrt{l}} \sim b^{3/2} \cdot l^{5/4} \tag{6}$$

$m \cdot 1^3 = m$ ist hierin die Masse eines ähnlichen Pendels von der Länge 1.

Oder es ist, wenn man l auf die rechte Seite bringt, nach leichter Umrechnung:

$$h \sim \left(\frac{b}{l}\right)^{3/2} \cdot \frac{l^{1/4}}{m}. \tag{7}$$

Bedenkt man, daß nach dem Gesetz „Bogen gleich Winkel mal Halbmesser" $\frac{b}{l}$ nichts weiter ist als die Schwungweite des Pendels im Bogenmaß, so kann man die Gleichung (7) so in Worten formulieren: Die Störungsimpulse, die das Pendel im Durchschnitt zu erleiden hat, sind ungefähr proportional zu der $^3/_2$ten Potenz seines Schwungwinkels und zu der vierten Wurzel aus der Pendellänge, dagegen umgekehrt proportional der Masse oder dem Gewicht eines ähnlichen Pendels von einem Meter Länge.

Hieraus ergeben sich zunächst folgende praktischen Forderungen:

1. Man mache die Pendelmasse so groß als irgend möglich, wähle also ein schweres Pendelmaterial; dann wird die Störung h klein, weil m im Nenner steht. Das betont ja auch Prof. Irk ausdrücklich. Eine Grenze findet die Massenvergrößerung in der erforderlichen Zartheit der Aufhängevorrichtung, deren allzu robuste Konstruktion wieder vermehrend auf die Verluste einwirkt.

2. Man mache, um den Luftwiderstand zu verringern, die Pendelform so „schnittig" als möglich, weil dadurch der Energiebedarf und mit ihm die Störungsimpulse klein werden. Dabei ist zu beachten, daß der Hauptwiderstand jeweils hinter der Linse liegt, wo die energieverzehrenden Luftwirbel liegen, die den Bewegungswiderstand ausmachen. Denselben Zweck verfolgt man mit möglichst feiner Ausführung der Pendelfeder und der Hemmung, damit die elastische Nachwirkung und die Reibung (Ruhebogen!) auf einen kleinsten Wert reduziert werden.

3. Man sorge dafür, daß der auf der rechten Seite von Gleichung (7) stehende Wert $\left(\frac{b}{l}\right)^{3/2} \cdot l^{1/4}$ so klein als möglich wird. Hierin liegt der Kernpunkt unserer Betrachtung. Um der Frage näherzukommen, müssen wir zunächst über den in Bogeneinheiten gemessenen Schwungwinkel $\frac{b}{l}$ (Winkel gleich Bogen dividiert durch den Halbmesser) Klarheit schaffen. Es muß wohl ohne weiteres zugegeben werden, daß lange Pendel einen kleineren Schwingungsbogen erhalten als kurze. Stellen wir uns z. B. vor, daß die in Bogenminuten gemessenen Gesamtschwungweiten φ (eine Bogenminute gleich $\frac{1}{60}$ Bogengrad gleich $\frac{1}{60 \cdot 57{,}3} = 0{,}00029$ Bogeneinheiten) mit den einzelnen in Metern gemessenen Pendellängen in folgender Weise zunehmen:

$l =$	0,25	0,44	0,56	1	2	sehr lang
		(90 = Schläger)	(80 = Schläger)			
$\varphi =$	635	430	345	210	163	160

Die durchgezogene Kurve der Abbildung 3 zeigt diesen Zusammenhang in graphischer Weise. Nach rechts sind die Pendellängen und nach oben die Totalausschläge in Bogenminuten eingetragen. Für sehr lange Pendel ist eine Gesamtschwungweite von 160 Bogenminuten angenommen. Diese

Zahlenreihe ist natürlich willkürlich gewählt und wird von dieser oder jener Seite Widerspruch finden; aber ohne sie kommen wir nicht aus. Man bedenke auch, daß sie für Präzisionsuhren gedacht ist, wie sie vielleicht mit derartigen

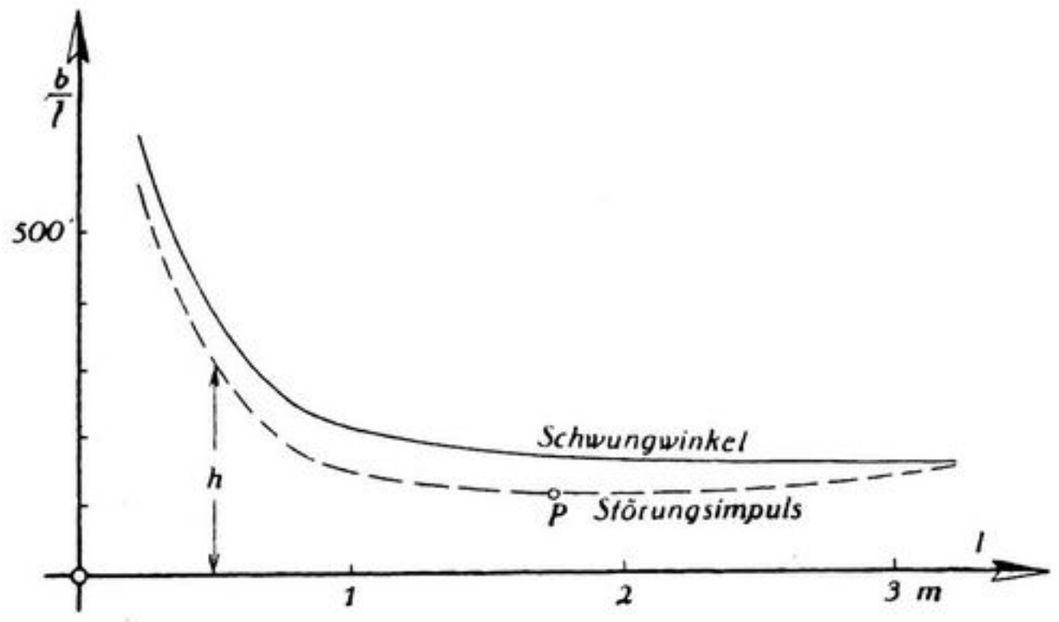

Abb. 3

Pendellängen noch kaum ausgeführt worden sind. Für Mathematiker sei nebenbei bemerkt, daß die Tabelle mit Hilfe der Formel

$$\varphi = 160 + 1000 \cdot e^{-3 \cdot l}$$

berechnet ist.

Wenn wir nun diesen Zusammenhang zwischen $\varphi = \frac{b}{l}$ und l selbst in Gleichung (7) einführen, die Werte von $\left(\frac{b}{l}\right)^{3/2} \cdot l^{1/4}$ (oder, was dasselbe ist, $\sqrt[2]{\varphi^3} \cdot \sqrt[4]{l}$) ausrechnen und in Kurvenform auftragen (vergl. die punktierte Kurve in Abb. 3), sehen wir deutlich, daß die Kurve h der Störungen an der Stelle P eine Pendellänge andeutet, für die die Störungsimpulse kleiner werden als für jede andere Länge. Natürlich ist diese beste Pendellänge — die sich der Kurve gemäß etwa bei $l =$ 1,7 m befindet — nicht etwa zahlenmäßig maßgeblich für die Praxis, weil wir die Reihe der Schwungweiten willkürlich gewählt haben; aber trotzdem ist aus dieser Betrachtung ersichtlich, daß und weshalb es eine solche vorteilhafte Länge geben kann, die jedenfalls nicht bei den ganz kurzen und auch nicht bei den ganz langen Pendeln zu suchen ist. Dadurch ist die bekannte Tatsache verständlich gemacht, daß sich eine bestimmte Pendellänge in der Praxis als die zweckmäßigste erweist.

Die Formel (7) ist aber nicht etwa bloß ein Produkt geistigen Sports, denn sie zeigt den Weg, auf dem man das Beste erreichen kann; man vergleiche das oben unter 1. bis 3. Gesagte. Außerdem zeigt sich, daß eine kleine Schwungweite b stets vorteilhaft wirkt, weil die Störung mit ihr zugleich abnimmt. Natürlich darf man hierin nicht gar zu weit gehen, auch wenn die Hemmung es zuließe, weil dann wieder eine übermäßige Empfindlichkeit gegenüber Erschütterungen eintreten könnte, auf die wir hier ja absichtlich keine Rücksicht genommen haben.

Für Mathematiker sei nebenbei bemerkt, daß die beste Pendellänge l unter Voraussetzung von $\frac{b}{l} = A + B \cdot e^{-\alpha \cdot l}$ aus der Bestimmungsgleichung $\frac{2n}{n-1} \cdot l \cdot \alpha = \frac{A}{B} \cdot e^{\alpha l} + 1$ folgt, worin n die Potenz der Geschwindigkeit ist, der man den Widerstand proportional gesetzt hat. Nicht alle solche Gleichungen lassen eine Lösung zu, d. h. es gibt nicht unter allen Umständen eine beste Pendellänge. In diesem Falle ist das längere Pendel meistens besser als das kürzere.

Zum Schluß ein paar Worte über die unmittelbaren Folgen einer solchen „kinetischen" Störung h, um mit Schieferstein zu reden. Unter dieser Bezeichnung wird nämlich eine durch äußere Einwirkung verursachte plötzliche Änderung der Geschwindigkeit verstanden, wie sie eben durch h repräsentiert wird. Der Geschwindigkeitswert von h ist bereits durch Gleichung (5) gegeben und braucht hier nicht noch einmal besprochen zu werden.

Was tritt nun ein, wenn der Kreis der Abbildung 1 durch eine h-Zacke entstellt wird?

a) Zunächst ersieht man aus der Abbildung 4, daß die Schwingungsdauer um den Winkel β vergrößert wird, also nach Gleichung (3) um $\beta \cdot \frac{T}{\pi}$ Sekunden, denn vor der Störung ging der Schwingungsbogen bis zum Punkte 1, und nach derselben fängt er im Punkte 2 wieder an. β ist aber folgendermaßen leicht bestimmbar: Aus den schraffierten, ähnlichen Dreiecken erkennt man das Verhältnis:

$$y : h = x : \frac{b}{2}, \text{ daher:}$$

$$y = \frac{2x}{b} \cdot h.$$

Also ist nach dem Gesetz: Bogen gleich Halbmesser mal Winkel oder Winkel gleich Bogen, dividiert durch den Halbmesser:

$$\beta = \frac{y}{b/2} = 4 \frac{x}{b^2} \cdot h.$$

Unter Verwendung der Formel (3) entspricht dieses β der Sekundenzahl:

$$\beta \frac{T}{\pi} = \frac{4xh}{b^2 \cdot \pi} \cdot T, \qquad (8)$$

um die die Schwingungsdauer T, bei der die Störung auftrat, verlängert wird, wenn, wie hier, die Störung nach dem Durchgang des Pendels durch die Mitte geschah. Vor diesem Moment hätte eine gleichsinnige, d. h. antreibende Störung eine Verkürzung eingebracht, in der Mitte der Bahn aber gar keine Änderung, wie aus der Skizze leicht erkennbar ist. Also eine neue Bestätigung der alten Erfahrung, daß das Pendel in der Bahnmitte gegen kinetische Störungen am unempfindlichsten ist; dort ist nämlich $x = o$.

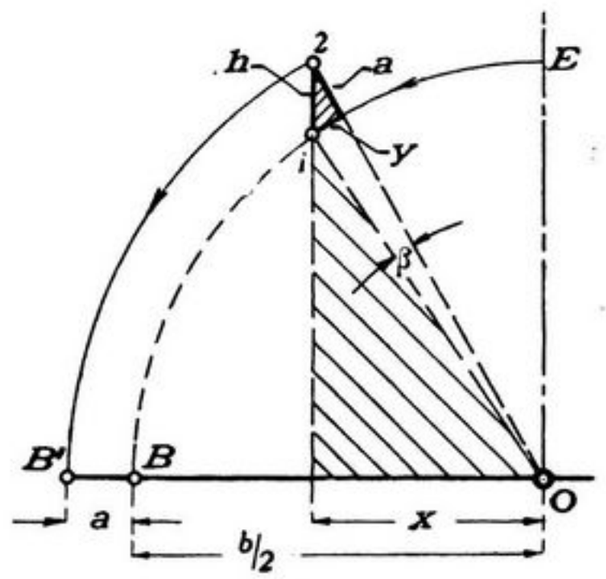

Abb. 4

b) Weiter aber erfolgt eine Veränderung der Schwungweite, denn laut Abbildung 4 „landet" die Linse jetzt nicht in B, sondern in B', so daß die Schwungweite um a größer geworden ist. a ergibt sich aus:

$$a : h = \sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2} : \frac{b}{2}$$

$$\text{zu:} \qquad a = h \cdot \frac{\sqrt{b^2 - 4x^2}}{b}. \qquad (9)$$

Erfolgt also ein Stoßimpuls am Bahnende, wo $x = b$ ist, so tritt keine Änderung der Schwungweite ein.

Bei dem mangelnden Pendelisochronismus bedeutet das natürlich auch eine Gangstörung, und es ist ja zur Genüge bekannt, daß die kurzen Pendel größeren Änderungen der Schwungweite unterliegen als lange. Das wird nunmehr aus Gleichung (7) und Abbildung 3 verständlich, da ja h zunächst mit der Pendellänge abnimmt.

Zusammenfassung: Wir hatten zwischen systematischen und zufälligen Störungen unterschieden; die systematischen sind die Folge des unvollkommenen Antriebes durch die Hemmung und wiederholen sich dauernd; die zufälligen dagegen laufen in verschiedenen Richtungen, sind unberechen-