Ein Beitrag zur einfachen rechnungsmäßigen Behandlung des Graham-Ganges in der Reparatur-Praxis

Von Rudolf Pleskot

Es kann bei einer dem Uhrmacher zur Reparatur übergebenen Pendeluhr mit Graham-Gang der Fall vorliegen, dafs einer der beiden Teile der Hemmung — der Anker oder das Gangrad — fehlt. Zur Ermittlung der für die Neuanfertigung notwendigen Abmessungen des fehlenden Teiles bedient man sich dann vorteilhaft der bekannten, in verschiedenen Jahrgängen des Deutschen Uhrmacher-Kalenders*) enthaltenen „Tabellen für den Graham-Gang", die die Gröfsenverhältnisse für einen gegebenen Gangrad-Durchmesser oder eine gegebene Eingriffsweite entnehmen lassen. Diese Tabellen sind je für eine bestimmte Zähnezahl des Gangrades und eine bestimmte Anzahl der vom Anker zu übergreifenden Teilungen berechnet, setzen also bei ihrer Anwendung die Kenntnis von Gangrad-Zähnezahl und Ankergreifweite voraus.

Handelt es sich bei einer derartigen Reparatur darum, zu der gegebenen Eingriffsweite einen ganz neuen Graham-Gang anzufertigen, und sind dabei weder der alte Anker noch das ursprüngliche Gangrad vorhanden, so ist zunächst die Zähnezahl des letzteren aus den übrigen in Betracht kommenden Zähnezahlen des Werkes und der Schwingungs-

*) Zuletzt im Jahrgang 1909, Seite 70 bis 105.

zahl des Pendels zu berechnen*) und sodann Entscheidung zu treffen, über wieviele Teilungen man den Anker greifen lassen will. Die genauen Ankerverhältnisse und der Gangrad-Durchmesser ergeben sich dann aus derjenigen der erwähnten Tabellen, die mit der berechneten Gangrad-Zähnezahl und der gewählten Ankergreifweite überschrieben ist.

Minder einfach als in dem soeben angeführten Falle gestaltet sich die Lösung der Aufgabe jedoch dann, wenn nicht der ganze Gang fehlt, sondern einer der beiden Hemmungsteile (Gangrad oder Anker) vorhanden und verwendbar ist.

Fehlt in einer zur Reparatur eingelaufenen Pendeluhr beispielsweise der Anker, während das Gangrad vorhanden ist und wieder verwendet werden soll, so dürfen wir — die Beibehaltung der gegebenen Eingriffsweite vorausgesetzt — den anzufertigenden neuen Anker nicht, wie vorhin, nach freier Wahl über eine innerhalb gewisser Grenzen beliebige Anzahl von Teilungen greifen lassen. Die Zahl der vom Anker zu übergreifenden Teilungen ist hier durch die Eingriffsweite sowie durch den Durchmesser und die Zähnezahl des vorhandenen Gangrades bereits festgelegt. Sie kann jedoch nicht ohne weiteres mit Sicherheit erkannt werden, und es ist daher in einem solchen Falle vorerst noch zweifelhaft, welche der Tabellen zur Gröfsenermittlung für den neuen Anker Anwendung zu finden hat.

Ähnlich liegt es im umgekehrten Falle, wenn nämlich bei vorhandenem und verwendbarem Anker das Gangrad fehlt und die ursprüngliche Eingriffsweite (ihre Richtigkeit natürlich vorausgesetzt) beibehalten werden soll. Die Zähnezahl des Gangrades kann hier zwar wieder aus den übrigen in Betracht kommenden Zähnezahlen des Gehwerkes und der Schwingungszahl ermittelt werden, es bleibt jedoch dann ebenfalls noch fraglich, über wieviele Teilungen der Anker greift, so dafs auch in diesem Falle nicht ohne weiteres erkannt werden kann, welche der Tabellen anzuwenden ist.

---

*) Siehe den Satz auf Seite 8.

Es handelt sich demnach beim Gebrauch jener Tabellen für einen der beiden angegebenen Zwecke vor allem darum, die für den jeweils vorliegenden Fall passende aus ihnen herauszufinden. Naheliegend ist, dafs dies durch den Versuch geschehen kann. Sind beispielsweise die Eingriffsweite und der Gangrad-Durchmesser bekannt (wenn also nur der Anker fehlt), so kann man durch probeweises Nachrechnen mit Hilfe der betreffenden Tabellenwerte untersuchen, welche der Tabellen zu dem gegebenen Raddurchmesser die gegebene Eingriffsweite richtig liefert. Stimmt das Ergebnis bei keiner der Tabellen genau mit der von der Gestellplatte abgemessenen Eingriffsweite überein, so war der Gang in dieser Beziehung fehlerhaft; man wird dann diejenige Tabelle wählen, die bei der probeweisen Nachrechnung die geringste Differenz ergeben hat, und die Eingriffsweite im Uhrwerk entsprechend berichtigen müssen. Liegt dagegen der umgekehrte Fall vor, dafs nämlich der Anker vorhanden ist, das Gangrad jedoch fehlt, so rechnet man, nachdem die Gangrad-Zähnezahl ermittelt ist, in der gleichen Weise nach, welche der Tabellen z. B. zu dem durch den vorhandenen Anker gegebenen Durchmesser des äufseren Ankerkreises die gegebene Eingriffsweite genau (oder am genauesten) liefert, und verfährt im übrigen wie vorhin. Der Gangrad-Durchmesser ergibt sich dann aus der auf diese Weise ermittelten Tabelle.

An Stelle dieses probeweisen Aufsuchens der richtigen Tabelle lassen sich aber auch andere Wege einschlagen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

1. Der Anker fehlt

Bekannt sind in diesem Falle der Durchmesser sowie die Zähnezahl des Gangrades und die Eingriffsweite. Zu ermitteln ist die vom Anker zu übergreifende Zahl von Teilungen des Gangrades (die Ankergreifweite). Sie kann auf folgendem Wege gefunden werden:

Man multipliziert den Gangrad-Durchmesser mit sich selbst und dividiert dann durch die doppelte Eingriffsweite;

was herauskommt, nimmt man in den Spitzzirkel und mifst am Gangrad-Umfange nach, über wieviele Teilungen der Zirkel greift;

dann zieht man die Zahl der vom Zirkel übergriffenen Teilungen von der halben Gangrad-Zähnezahl ab;

was bleibt, ist die Zahl der vom Anker zu übergreifenden Teilungen.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus folgendem

Beweis: In beistehender Fig. 1 ist $o\,a$ der

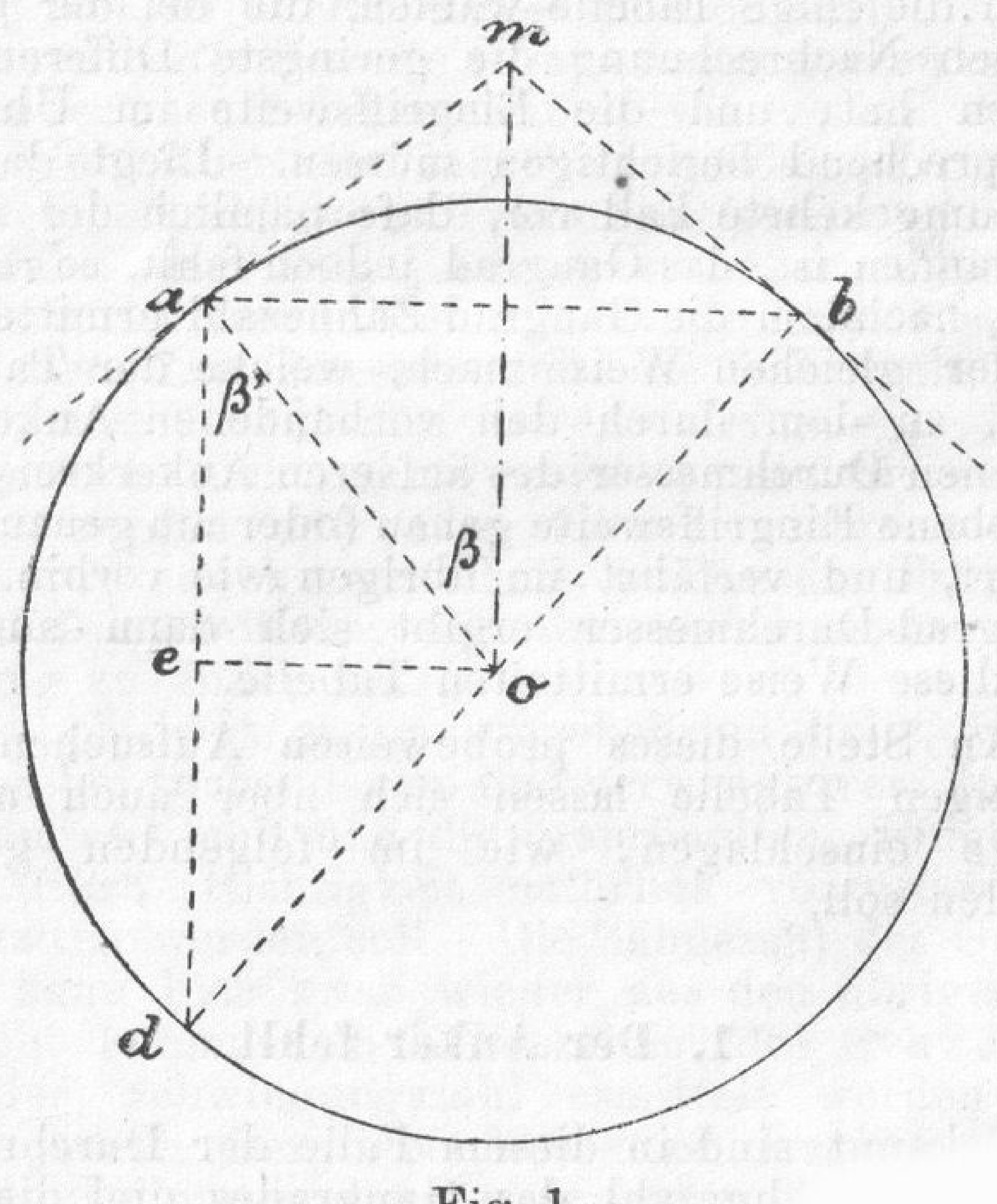

Fig. 1

Gangrad-Halbmesser, $o\,m$ die Eingriffsweite, β der halbe Durchgangswinkel, $a\,d$ die vom Punkte a aus gezogene, zu $o\,m$ parallele Sehne und $o\,e$ das vom

Gangrad-Mittelpunkte o aus auf diese Sehne gefällte Lot. Es ist nun

$$\measuredangle \beta = \measuredangle \beta'$$

und daher

$$\frac{o\,a}{o\,m} = \frac{a\,e}{a\,o},$$

woraus

$$a\,e = \frac{(o\,a)^2}{o\,m}$$

und

$$a\,d = 2\,a\,e = \frac{2\,(o\,a)^2}{o\,m}.$$

Bezeichnen wir den Gangrad-Halbmesser $o\,a$ mit R und die Eingriffsweite $o\,m$ mit E, so haben wir:

$$a\,d = \frac{2\,R^2}{E}$$

oder, wenn wir den Gangrad-Durchmesser D einführen:

$$a\,d = \frac{D^2}{2\,E}.$$

Da der Peripheriewinkel $d\,a\,b$ ein rechter ist, so ist (nach dem Satz des Thales) $d\,o\,b$ ein Durchmesser und der Bogen $d\,a\,b$ ein Halbkreis, nämlich der halbe Gangrad-Umfang.

Bezeichnen wir nun die Anzahl der Zahnteilungen, die der Bogen über der Sehne $a\,d$ enthält, mit n, die Gangrad-Zähnezahl mit Z und die Zahl der auf den Bogen über $a\,b$ entfallenden (d. s. die vom Anker übergriffenen) Teilungen mit z, so ergibt sich:

$$z = \frac{Z}{2} - n.$$

B e i s p i e l. Wenn der Durchmesser eines 32zähnigen Gangrades 29,5 mm und die Eingriffsweite 20 mm beträgt, über wieviele Teilungen mufs dann der neu anzufertigende Anker greifen?

L ö s u n g. Zunächst ist nach obigem Satze (Seite 4 oben) der Gangrad-Durchmesser mit sich selbst zu multiplizieren:

$$29{,}5 \times 29{,}5 = 870{,}25.$$

Diese Zahl ist durch die doppelte Eingriffsweite (also durch $2 \times 20 = 40$) zu dividieren:

$$870{,}25 : 40 = 21{,}7 \text{ mm.}$$

Auf dieses Mafs wird nun ein Spitzzirkel eingestellt und dann am Umfange des Gangrades nachgemessen, wieviele Teilungen die Zirkelspitzen übergreifen. Im vorliegenden Falle werden es $8^1/_2$ Teilungen sein. Diese sind nun von der halben Gangrad-Zähnezahl (d. i. 16) abzuziehen:

$$16 - 8^1/_2 = 7^1/_2.$$

Also mufs der Anker über $7^1/_2$ Teilungen greifen.

Die genauen Abmessungen des Ankers liefert nun in diesem Falle diejenige der Tabellen, die mit der Gangrad-Zähnezahl 32 und der Ankergreifweite über $7^1/_2$ Zähne (Teilungen) überschrieben ist.

Da immer mit der Möglichkeit zu rechnen ist, dafs der ursprüngliche Gang nicht genau ausgeführt war, so wird man selbstverständlich nicht verabsäumen dürfen, die Richtigkeit der gegebenen Eingriffsweite mit Hilfe des bezüglichen Tabellenwertes nachzuprüfen.

2. Das Gangrad fehlt

In diesem Falle handelt es sich vor allem darum, die Zähnezahl des Gangrades aus den übrigen in Betracht kommenden Zähnezahlen des Uhrwerkes und der Schwingungszahl des Pendels zu bestimmen. Die dabei vorzunehmende Rechnung ist folgende:

Man multipliziert die stündliche Schwingungszahl des Pendels mit dem Produkte der Zähnezahlen von Zwischentrieb und Gangtrieb und dividiert dann durch das doppelte Produkt der Zähnezahlen von Minutenrad und Zwischenrad.*)

---

*) Die Formel lautet:

$$G = \frac{S \,.\, z \,.\, g}{2 \,.\, M \; Z},$$

worin G die Gangrad-Zähnezahl, S die stündliche Schwingungszahl des Pendels, ferner z, g, M und Z die Zähnezahlen von Zwischentrieb, Gangtrieb, Minutenrad und Zwischenrad bedeuten.

Fehlt hier zugleich auch das Gangtrieb, so kann man dessen Zähnezahl (die bei Anwendung des vorstehenden Satzes bekannt sein mufs) folgendermafsen berechnen:

Man multipliziert die um die Zahl 3,14 vermehrte Zwischenrad-Zähnezahl mit der doppelten Eingriffsweite von Zwischenrad und Gangtrieb, dividiert dann durch den vollen Durchmesser des Zwischenrades und zieht von dem Ergebnis die Zwischenrad-Zähnezahl ab.*)

Liefert diese Rechnung keine ganze, sondern eine Dezimalzahl, so rundet man diese zur nächst höheren ganzen Zahl ab; dies ist dann die gesuchte Zähnezahl des Gangtriebes.

Beispiel. In einem zur Reparatur eingelaufenen Sekunden-Regulator fehlt das Gangrad samt Trieb. Die Auszählung ergibt: Minutenrad 96, Zwischenrad 90, Zwischentrieb 12 Zähne. Die Eingriffsweite vom Zwischenrad zum Gangtrieb beträgt 24,3 mm, der volle Durchmesser des Zwischenrades 44,5 mm. Welches sind die richtigen Zähnezahlen der beiden fehlenden Teile?

Lösung. Zunächst ist die Zähnezahl des Gangtriebes zu ermitteln. Zu diesem Zwecke haben wir nach dem obigen Satze (Seite 7) die um 3,14 vermehrte Zwischenrad-Zähnezahl (d. i. $90 + 3{,}14 = 93{,}14$) mit der doppelten Eingriffsweite (d. i. $2 \times 24{,}3 = 48{,}6$) zu multiplizieren:

$$93{,}14 \times 48{,}6 = 4526{,}604.$$

Diese Zahl haben wir durch den vollen Durchmesser des Zwischenrades, also durch 44,5 zu dividieren:

$$4526{,}604 : 44{,}5 = 101{,}72.$$

Und hiervon ist die Zähnezahl des Zwischenrades $= 90$ abzuziehen:

$$101{,}72 - 90 = 11{,}72.$$

---

*) Die Formel lautet:

$$z = \frac{2\,E\,(Z + 3{,}14)}{D} - Z,$$

worin z die gesuchte Triebzähnezahl, E die Eingriffsweite, Z die Radzähnezahl und D den vollen Raddurchmesser bezeichnen.

Da nun hier keine ganze Zahl herausgekommen ist, sondern die Dezimalzahl 11,72, so haben wir diese auf die nächst höhere ganze Zahl abzurunden, das ist die Zahl 12. Das neu einzudrehende Gangtrieb mufs also zwölfzähnig sein.

Nun können wir auch die Zähnezahl des Gangrades berechnen, so wie dies der Satz auf Seite 6 angibt.

Da es sich um einen Sekundenregulator handelt, so ist die stündliche Schwingungszahl des Pendels = 3600. Diese Zahl ist mit dem Produkte der

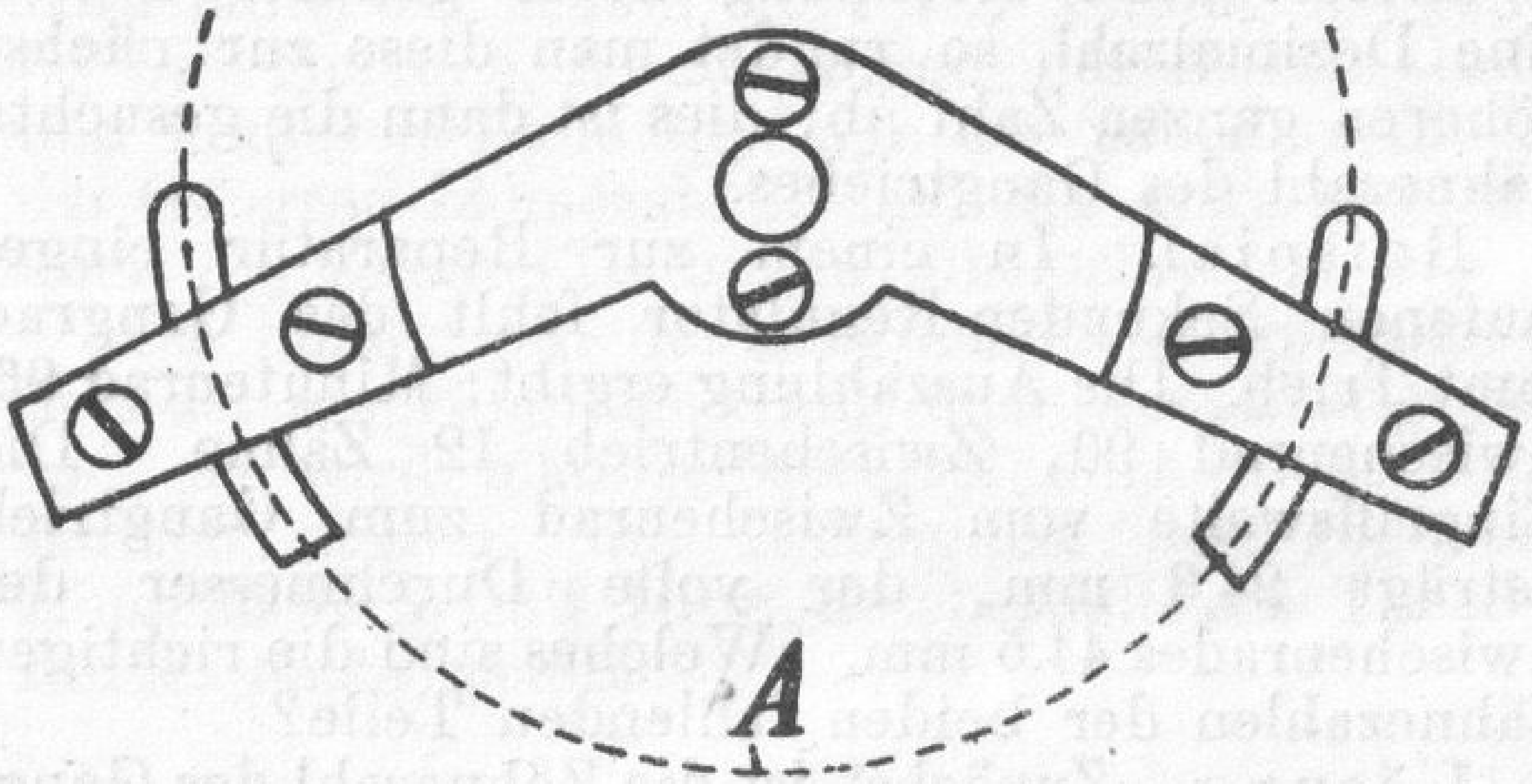

Fig. 2

Zähnezahlen von Zwischentrieb und Gangtrieb (d. i. $12 \times 12 = 144$) zu multiplizieren:

$$3600 \times 144 = 518\,400,$$

und dieses Ergebnis ist durch das doppelte Produkt der Zähnezahlen von Minutenrad und Zwischenrad (also durch $2 \times 96 \times 90 = 17\,280$) zu dividieren:

$$518\,400 : 17\,280 = 30.$$

Also ist 30 die gesuchte Zähnezahl des Gangrades. —

Hat man so die Gangrad-Zähnezahl ermittelt, so handelt es sich nun wieder darum, festzustellen, wieviele Teilungen (Zähne) des Gangrades zwischen die Ankerklauen zu liegen kommen. Dies kann natürlich ebenfalls durch Rechnung gefunden werden; doch läſst sich ein rein rechnerisches Verfahren, das die für den praktischen Gebrauch wünschenswerte Einfachheit besäſse, nicht angeben. Wir umgehen daher den verwickelteren Teil der

Rechnung durch eine (sehr einfache) Konstruktion, worauf die gesuchte Zahl der vom Anker zu übergreifenden Teilungen wieder leicht ausgerechnet werden kann.

Das Verfahren ist folgendes:

Man nimmt vom Anker den Halbmesser desjenigen Kreises ab, der genau durch die Mitte der Klauenbreite geht (vergl. den Kreis *A* in Fig. 2),

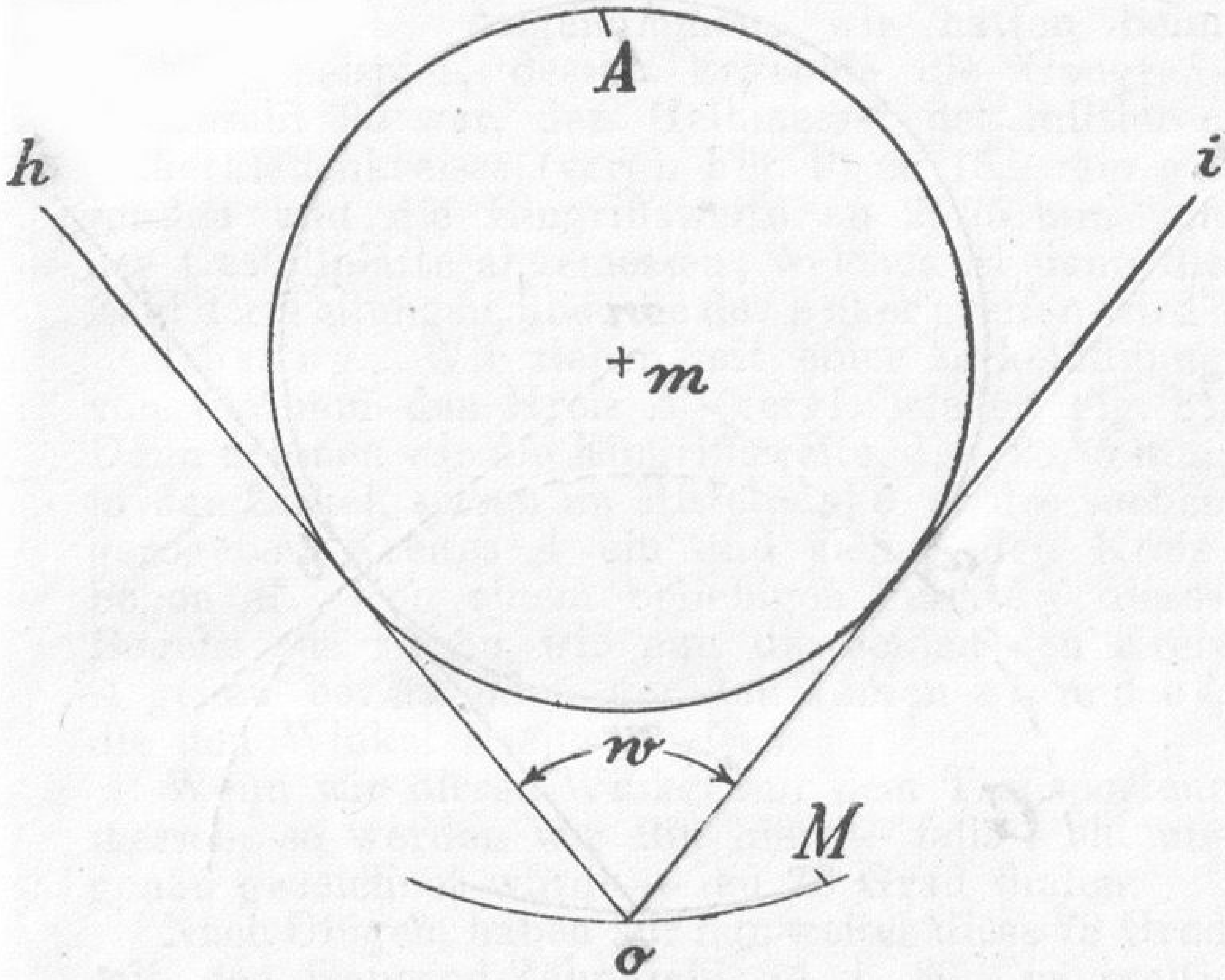

Fig. 3

und zieht auf einem Blatt Papier mit einem auf diesen Halbmesser eingestellten Zirkel den Kreis *A* (Fig. 3). Dann nimmt man die — von der Gestellplatte abmeſsbare — Eingriffsweite in den Zirkel und zieht vom Mittelpunkte *m* des Kreises *A* aus den Kreisbogen *M*. Auf diesem Bogen wählt man einen (beliebigen) Punkt *o* und zieht von diesem aus die beiden geraden Linien *o h* und *o i* so, daſs sie den Kreis *A* genau berühren. Auf diese Weise erhält man den Winkel *w*. Dieser ist mit dem Transporteur zu messen.

Multipliziert man nun die Anzahl der Grade dieses Winkels mit der Gangrad-Zähnezahl und dividiert dann durch 360, so erhält man die gesuchte Zahl der vom Anker zu übergreifenden Teilungen.

Beweis: Konstruktionsprinzip für den Graham-Gang ist bekanntlich, daſs die beiden Schenkel des Durchgangswinkels die Berührungsradien

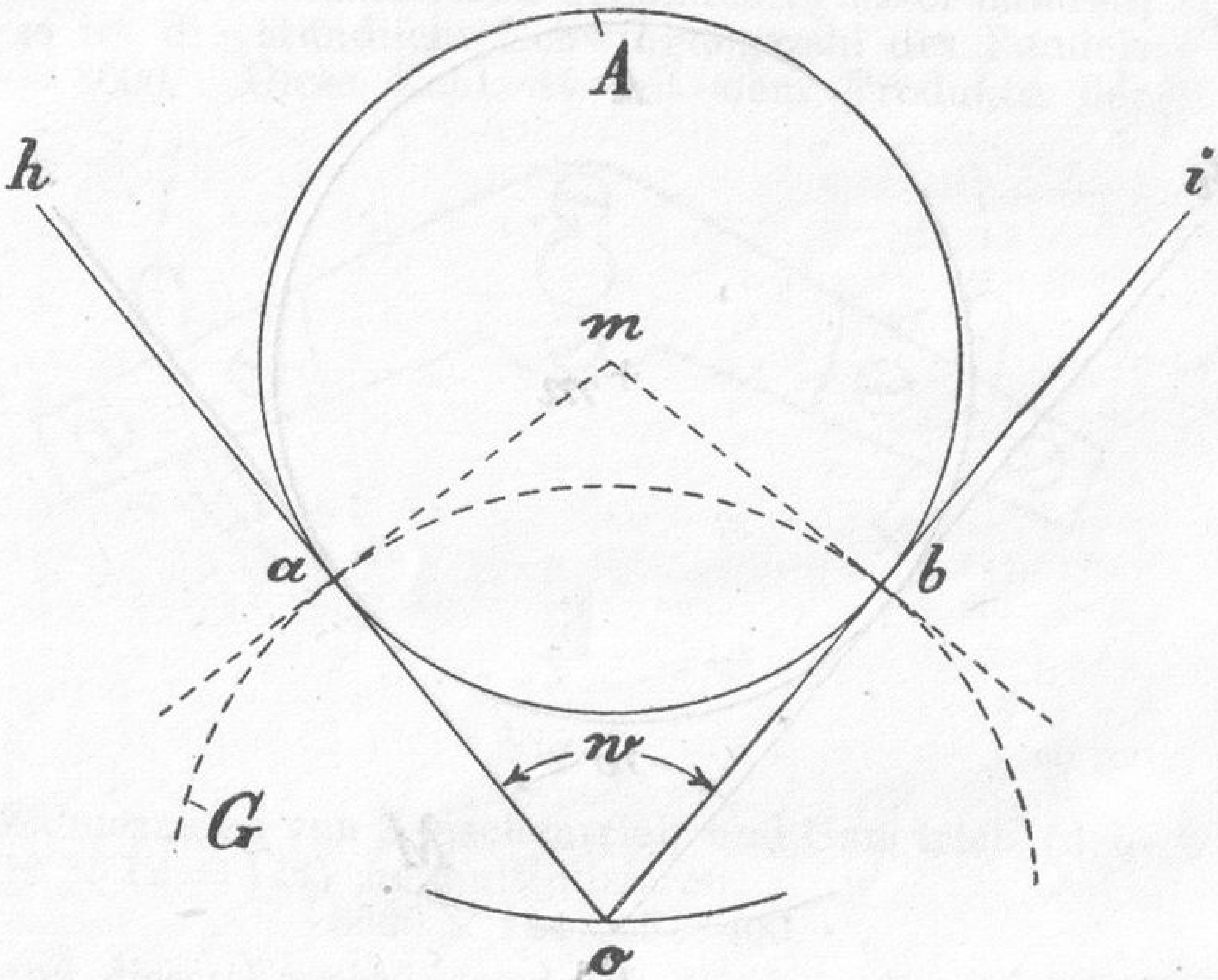

Fig. 4

(Normalen) der vom Ankermittelpunkte an den Zahnspitzenkreis des Gangrades gelegten Tangenten sind. Fällen wir nun in obiger Konstruktion (Fig. 3) vom Ankermittelpunkte m aus auf oh und oi Senkrechte (siehe Fig. 4) und ziehen wir um o durch die Schnittpunkte a und b den Kreis G, so sind ma und mb Tangenten an den Kreis G, oa und ob aber die zugehörigen Berührungsradien. Daraus folgt, daſs G der Zahnspitzenkreis des Gangrades und w nichts anderes ist als der Durchgangswinkel.

Bezeichnet nun Z die Zähnezahl des Gangrades und z die Zahl der vom Anker zu übergreifenden Teilungen, so ist der Durchgangswinkel

$$w = \frac{360 \cdot z}{Z},$$

woraus

$$z = \frac{w \cdot Z}{360}.$$

Beispiel. Angenommen, wir hätten beim vorigen Beispiel, dessen Ergebnis die Gangrad-Zähnezahl 30 war, den Halbmesser des mittleren Ankerklauenkreises (vergl. Fig. 2) zu 16,2 mm gefunden und die Eingriffsweite zu 25,75 mm von der Gestellplatte abgemessen; welches ist dann die Zahl der Teilungen, über die der Anker greifen wird?

Lösung. Wir ziehen mit einer Zirkelöffnung von 16,2 mm den Kreis A (vergl. wieder Fig. 3). Dann nehmen wir die Eingriffsweite, d. s. 25,75 mm, in den Zirkel, setzen im Mittelpunkte m des soeben gezogenen Kreises A ein und ziehen den Kreisbogen M. Von einem beliebigen Punkte o dieses Bogens aus ziehen wir nun die beiden den Kreis A genau berührenden geraden Linien oh und oi, die den Winkel w einschliefsen.

Wenn wir diesen Winkel mit dem Transporteur messen, so werden wir ihn hier — falls nicht ungenau gezeichnet wurde — zu 78 Grad finden.

Nach Obigem haben wir nun weiter diese 78 Grad mit der Gangrad-Zähnezahl, d. i. 30, zu multiplizieren:

$$78 \times 30 = 2340,$$

und diese Zahl ist durch 360 zu dividieren:

$$2340 : 360 = 6{,}5.$$

Der Anker mufs demnach im vorliegenden Falle über $6\,^1/_2$ Teilungen greifen. —

Würde hierbei die Zahl 6,5 nicht ganz genau, sondern mit einer gröfseren oder kleineren Dezimale herausgekommen sein, so wäre dies ein Zeichen dafür, dafs entweder nicht genau genug gezeichnet oder die Mafse nicht richtig abgenommen wurden, oder dafs der Gang ursprünglich ungenau, d. h. nicht tangentenrichtig ausgeführt war. Die Abweichung wird jedoch kaum jemals so bedeutend sein, dafs das obige Verfahren nicht trotzdem wenigstens (in einem dem vorliegenden sonst entsprechenden Falle) die Zahl 6 richtig ergibt, die

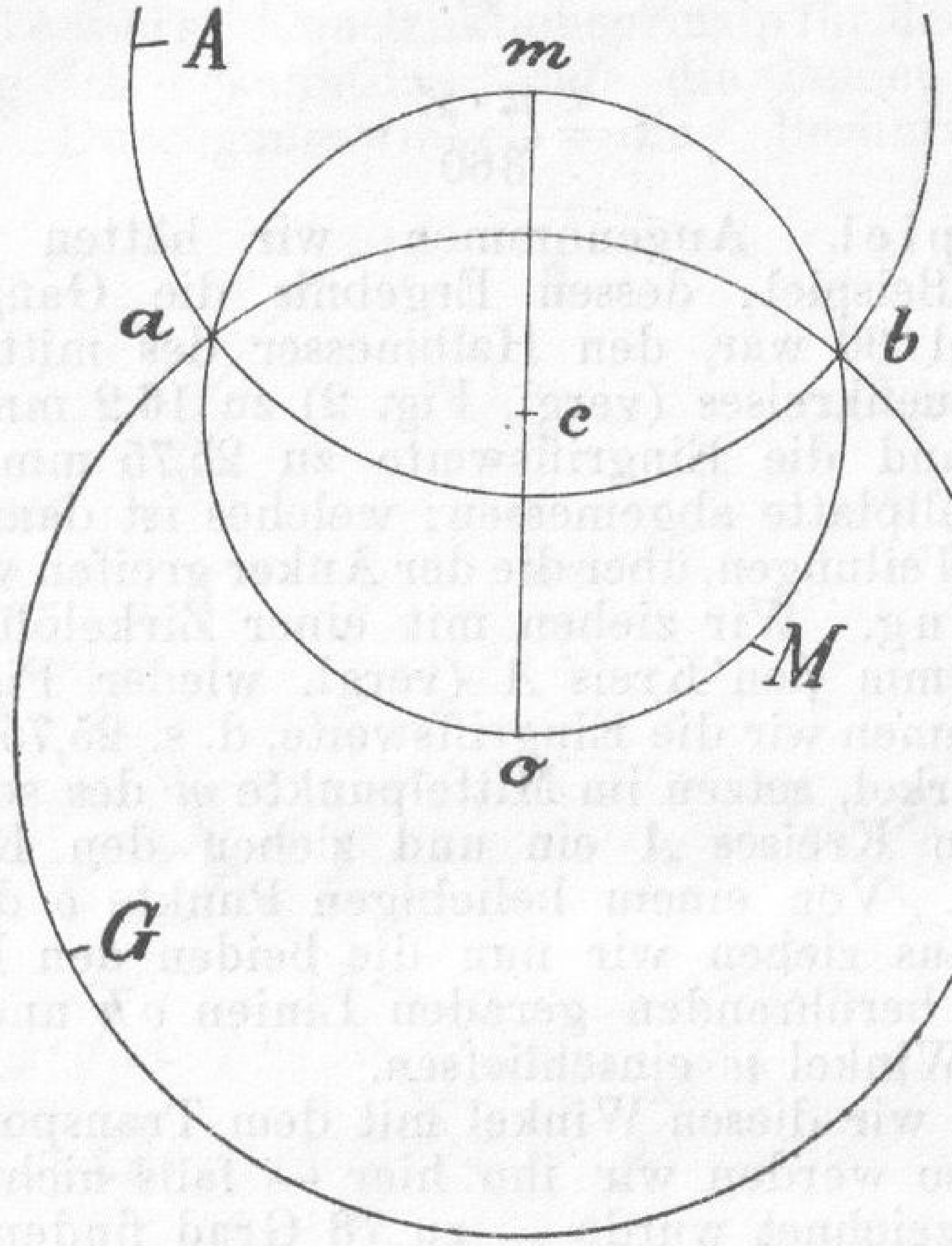

Fig. 5

genügt, um erkennen zu lassen, dafs dann der Anker über $6^1/_2$ Teilungen greifen mufs. Selbstverständlich wird in solchen Fällen schliefslich der Anker mehr oder weniger zu berichtigen sein, was entweder durch entsprechendes Verschieben der Klauen oder bei Ankern aus einem Stück in Fällen geringer Abweichung durch Richten unschwer ausführbar ist. Sollte sich jedoch in einem Falle eine zu grofse Abweichung herausstellen, so wäre ein neuer Anker einzusetzen. —

Sind auf die im vorstehenden angegebene Weise somit Gangrad-Zähnezahl und Ankergreifweite ermittelt, so ist der richtige Gangrad-Durchmesser dann leicht wieder aus der betreffenden Tabelle zu entnehmen. Man kann ihn jedoch vorteilhaft auch auf einem anderen Wege ermitteln, der bei gleicher Sicherheit namentlich deshalb noch praktischer ist, weil es dabei gar nicht nötig ist, vorher erst die Zahl der vom Anker zu übergreifenden Teilungen zu bestimmen. Das Verfahren besteht in folgender einfachen Konstruktion:

Man nimmt die halbe Eingriffsweite in den Zirkel und zieht den Kreis *M* (Fig. 5). Dann nimmt man vom Anker den Halbmesser des mittleren Klauenkreises (vergl. Fig. 2) ab, setzt in irgend einem Punkte *m* auf dem Umfange des Kreises *M* mit dem auf diesen Halbmesser eingestellten Zirkel ein und zieht den Kreisbogen *A* so, dafs er den Kreis *M* in zwei Punkten *a* und *b* schneidet. Hierauf zieht man von *m* aus durch den Mittelpunkt *c* des Kreises *M* den Durchmesser *m o*, setzt dann im Punkte *o* mit dem Zirkel ein und zieht durch die beiden Schnittpunkte *a* und *b* den Kreis *G*. Dies ist der Zahnspitzenkreis des Gangrades, sein Durchmesser also der gesuchte Gangrad-Durchmesser.

Beweis: Der Winkel *m a o* (Fig. 6) ist als Peripheriewinkel über dem Durchmesser *m c o* des Kreises *M* ein rechter; ebenso der Winkel *m b o*. Demnach sind *o a* und *o b* Tangenten an den mittleren Ankerklauenkreis *A*, und der Winkel *a o b* $= w$ ist somit der Durchgangswinkel. Da nun *m a* senkrecht zu *o a* steht und *m b* senkrecht zu *o b*, so sind *m a* und *m b* die dem Konstruktionsprinzip des Graham-Ganges entsprechenden Tangenten an den Zahnspitzenkreis des Gangrades, womit bewiesen ist, dafs dieser um *o* durch *a* und *b* zu ziehen ist.

Beispiel. Wenn (wie im letzten Beispiele) die Eingriffsweite 25,75 mm und der Halbmesser des mittleren Ankerklauenkreises 16,2 mm beträgt, welchen Durchmesser mufs dann das zu diesem Anker anzufertigende Gangrad haben?

Lösung. Wir ziehen mit der halben Eingriffsweite (d. i. rund 12,9 mm) als Radius einen Kreis *M* (vergl. wieder Fig. 5). Dann stellen wir den Zirkel auf 16,2 mm ein und ziehen von einem beliebigen Punkte des Kreisumfanges M aus den Kreisbogen A, der die beiden Schnittpunkte a und b liefert. Nachdem wir hierauf den Durchmesser $m\,o$ gezogen haben, setzen wir mit dem Zirkel in o ein und ziehen durch a und b den Kreis G. Der Durchmesser dieses Kreises ist nach Obigem der gesuchte Gangrad-Durchmesser; er ergibt sich hier durch Messen zu 40,0 mm. —

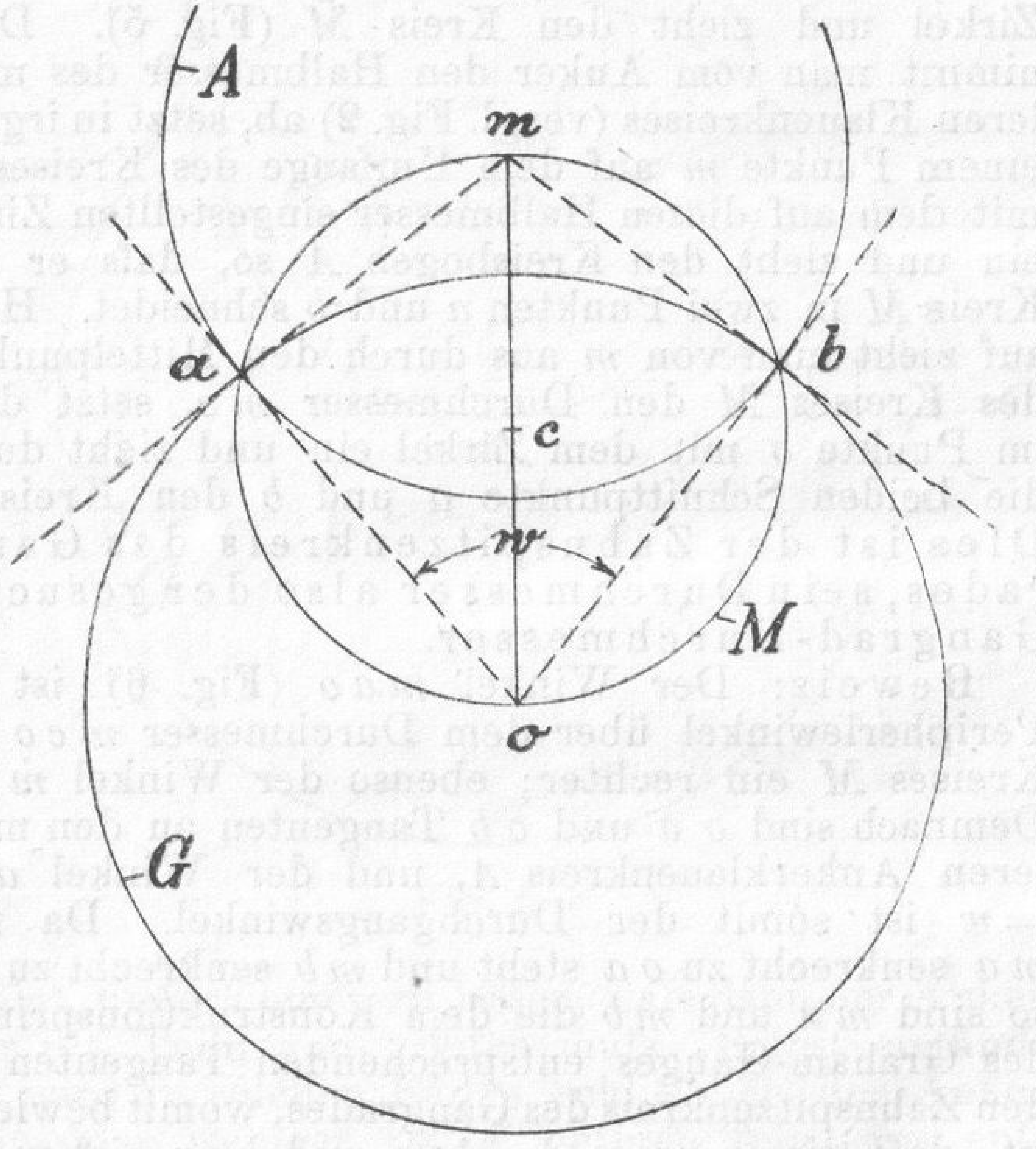

Fig. 6

Das auf diesem einfachen konstruktiven Wege gefundene Maſs stimmt mit der aus der betreffenden Tabelle zu berechnenden Gröſse natürlich genau überein, vorausgesetzt daſs der Zirkel jedesmal richtig eingestellt und daſs überhaupt genau gezeichnet wurde, was aber bei der Einfachheit der Konstruktion auch dem Ungeübten keine Schwierigkeiten bereiten dürfte. Zur Steigerung der Genauigkeit empfiehlt es sich, die Konstruktion in vergröfsertem Mafsstabe — etwa in drei- bis fünffacher natürlicher Gröfse — auszuführen.

Quelle: Deutscher Uhrmacher-Kalender 1914 S. 1-15