Untersuchung über den Gang von Taschenuhren.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Universität Leipzig

vorgelegt von

Karl Gey

aus **Pischwitz.**

Weida i. Th.

Druck von Thomas & Hubert

Spezialdruckerei für Dissertationen

1909.

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion auf Grund der Gutachten der Herren

Bruns und **Wiener.**

Leipzig, den 7. Mai 1909.

Der Procancellar.

Köster.

Dem Andenken meiner Eltern gewidmet.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

§ 1. Die vorliegende Arbeit ist auf eine im astronomischen Seminar des Herrn Prof. H. Bruns empfangene Anregung hin entstanden und bildet die Fortsetzung zu den seinerzeit von A. Krause (Inauguraldissertation 1906: Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften LVIII. Band, pag. 247ff.) veröffentlichten „Studien über das Verhalten von Taschenuhren.“

In jenen Krauseschen Rechnungen zeigt sich neben anderem, daß zwischen den Variationen einer Taschenuhr eine gewisse Abhängigkeit besteht, jedoch mußte damals eine nähere Untersuchung über die Art dieser Abhängigkeit noch zurückgestellt werden. Da nun seit dem Erscheinen jener Arbeit die Zahl der im Archiv der Leipziger Sternwarte aufbewahrten Gangregister von verglichenen Uhren immerhin nicht unwesentlich gewachsen ist, und da ferner eine noch zu erwähnende Voruntersuchung ergab, daß zu weiteren Rechnungen außer den von Krause ausschließlich berücksichtigten Uhren der Firma A. Lange & Söhne auch zu Uhren der Firma J. Aßmann gehörige Gangregister herangezogen werden können, so schien das vorhandene Material an Gangtabellen umfangreich und, da nur die seit 1897 gemachten Beobachtungen benutzt wurden, welche weit günstigere Resultate aufwiesen als die früher angestellten, auch geeignet genug, um an die Lösung der offenstehenden Frage heranzutreten. Eine Aufklärung über die Art der erwähnten Abhängigkeit herbeizuführen, soll demzufolge der Zweck der nachstehenden Erörterungen sein.

§ 2. Bezüglich geschichtlicher Notizen, die sich auf die Uhrenprüfung an der Leipziger Sternwarte beziehen, verweise ich auf die eingangs erwähnte Abhandlung. Zum besseren Verständnis der folgenden Untersuchung sei zunächst noch ein vollständiges Gangregistes unter Fortlassung der hier nicht in Betracht kommenden Epochen wiedergegeben.

I	II	III	IV
−12.7	+0.7		
−12.0	+0.8	+0.1	
−11.2	+1.0	+0.2	
−10.2	+1.0	0.0	Getragen
−9.2	+1.3	+0.3	
−7.9	+1.0	−0.3	
−6.9		(+0.5)	
	(+1.5)		
−5.4	+0.3	(−1.2)	
−5.1	+0.8	+0.5	
−4.3	+1.0	+0.2	
−3.3	+0.9	−0.1	Gelegen
−2.4	+0.7	−0.2	
−1.7	+0.8	+0.1	
−0.9		(+0.1)	
0.0	(+0.9)	(+0.4)	
+1.3	+1.3	+0.3	
+2.9	+1.6	−0.3	
+4.2	+1.3	−0.2	Getragen
+5.3	+1.1	−0.6	
+5.8	+0.5	0.0	
+6.3	+0.5	(+0.4)	
+7.2	(+0.9)	(+0.6)	
+8.7	+1.5	+0.3	
+10.5	+1.8	0.0	
+12.3	+1.8	+0.1	Gehangen
+14.2	+1.9	0.0	
+16.1	+1.9	−0.2	
+17.8	+1.7		

Zur Erläuterung der vorstehenden Tabelle ist folgendes zu sagen. Die Einheit der angeführten Zahlen ist die Sekunde. Die Spalte I enthält die Reihe der beobachteten Uhrkorrektionen; bildet man hierzu die Reihe der ersten Differenzen, so erhält man die Uhrgänge, die unter Spalte II eingetragen sind. Die zweite Differenzenreihe der Uhrkorrektionen oder, was dasselbe, die ersten Differenzen der Gänge, welche die Gangänderungen oder Variationen bilden, stehen unter Spalte III verzeichnet, während die Spalte IV Bemerkungen über die Lage der Uhr in der betreffenden Vergleichswoche enthält. Die Spalten I—III bilden somit ein vollständiges Differenzenschema; daraus folgt, daß die Gänge die Summengrößen erster Ordnung zu den Variationen sind, was sich in Gleichungen folgendermaßen ausdrücken läßt.

Bezeichnet man etwa die sechs aufeinanderfolgenden Gänge einer „reinen“, d. h. ein und derselben Lage mit g_1, $g_2 \ldots . g_6$ und die dazugehörigen Variationen der Reihe nach mit a, b, c, d, e, so gelten die Relationen:

$$g_2 - g_1 = a$$
$$g_3 - g_1 = a + b$$
$$g_4 - g_1 = a + b + c \quad \text{usw.}$$

Die Differenz zweier Gänge stimmt sonach stets überein mit der Summe der zwischen diesen Gängen gelegenen Variationen. Von dieser Bemerkung wird späterhin Gebrauch zu machen sein.

Den durch den Lagenwechsel beeinflußten Gang bezeichnet man zur Unterscheidung von den übrigen „reinen“ Gängen als Zwischengang. Dieser gibt zusammen mit dem vorangehenden und nachfolgenden Gange die zwei zum Lagenwechsel gehörigen Variationen, welche man zum Unterschiede von den übrigen „reinen“ Variationen Zwischenvariationen benennt. In der vorstehenden Tabelle sind diese dem Lagenwechsel, den ein horizontaler Strich kennzeichnet, entsprechenden Zahlen durch Klammern besonders hervorgehoben.

§ 3. Was die im folgenden zur Anwendung kommenden Methoden der Kollektivmaßlehre anbelangt, so werde ich mich vor allem auch hinsichtlich der Bezeichnungs- und Abkürzungsweise an das Lehrbuch von H. Bruns „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre“ halten.

Das Beobachtungsmaterial.

§ 4. Wie bereits erwähnt, wurden in den Krauseschen Rechnungen lediglich die zur Beobachtung an die Leipziger Sternwarte eingesandten Uhren der Firma A. Lange & Söhne in Glashütte herangezogen; und zwar wurde das vorhandene Beobachtungsmaterial durch einen in den Zeitpunkt 1898.0 gelegten Schnitt in zwei Reihen $L(1)$ und $L(2)$ zerlegt. Dabei ergab sich nun, daß die Uhren der Reihe $L(2)$ ausgesprochen günstigere Beobachtungsresultate vorwiesen als die der Reihe $L(1)$. Die auf Grund dieses Umstandes schon von Krause ausgesprochene Vermutung, daß um 1898 die Reglage der Uhren eine wesentliche Änderung erfahren habe, ist nachträglich durch die Mitteilung der Firma A. Lange & Söhne bestätigt worden, daß um jene Zeit in der Tat in dem Regulierungsverfahren eine nicht unwesentliche Verschärfung eingetreten sei. Demzufolge sind für die nachstehenden Untersuchungen nur die Uhren, die zur Reihe $L(2)$ gehören, zugrunde gelegt worden, wobei zu dem Umstande, daß die hierher gehörigen Uhren tatsächlich besser waren, noch hinzukam, daß die Beobachtung derselben in einer systematischeren Weise vorgenommen wurde, als dies bei den Uhren der ersten Gruppe der Fall war.

§ 5. Es wurden nun weiterhin noch, wie schon gesagt, von mir auch Uhren der Firma J. Assmann in Glashütte herangezogen, indem ich zunächst zu einer vorläufigen Rechnung sämtliche hierher gehörigen Gangregister, soweit sie in den reinen Variationen eine Toleranz von 5.0^s nicht überschritten, benutzte. Diese Register wurden durch einen Schnitt in zwei ungefähr gleichgroße Reihen $A(1)$ und $A(2)$ zerlegt, und die weiteren Rechnungen ergaben dann deutlich, daß auch hier $A(2)$ bessere Beobachtungsresultate aufwies als $A(1)$. Die daher sehr naheliegende Vermutung, daß auch bei Assmann in neuerer Zeit eine Änderung des Reglageverfahrens stattgefunden habe, wurde indessen durch die Mitteilung der Firma, daß in der ganzen Zeit der Reglagemodus derselbe geblieben sei, nicht bewahrheitet. Es dürfte also die ausgesprochene Verbesserung auf die mit der Zeit wachsende Geschicklichkeit und Erfahrung der Regleure zurückzuführen sein.

§ 6. Wurden nun in $A(2)$ und $L(2)$ die später zu erwähnenden „sporadischen" Fälle fortgelassen und hierauf die Verteilungstafeln für die reinen Variationen der Reihen $L(2)$ und $A(2)$ aufgestellt, so stand $A(2)$ nicht ungünstiger als $L(2)$, sondern eher etwas günstiger insofern, als die kleinen Variationen bei Assmann relativ häufiger auftraten als bei Lange. Auf Grund dieser Tatsache wurden daher die Assmannschen Uhren aus der Zeit nach 1897 mit den Langeschen Uhren aus der nämlichen Zeit in eine einzige Reihe zusammengefaßt und aus den vorhandenen Aufzeichnungen zunächst alle nach 1897 beobachteten Gangtabellen herangezogen, die zu Ankeruhren aus den Fabriken von A. Lange & Söhne oder J. Assmann gehören. Hierbei wurde jedoch eine Langesche Uhr sofort ausgeschieden, weil die beobachteten Zahlen der Gangtabelle auf den ersten Blick erkennen ließen, daß in dem Werke nach Beginn der Beobachtung etwas in Unordnung geraten sein mußte.

Die übrigen Tabellen hingegen zeigten bei der bloßen Durchsicht nichts auffälliges, abgesehen natürlich von den vereinzelt vorkommenden stärkeren Werten in den Variationen und Gängen.

§ 7. Es bilden nun den Hauptbestandteil des verwerteten Beobachtungsmaterials die Uhren, die unmittelbar von der Fabrik oder auch von Leipziger und auswärtigen Uhrmachern zur Prüfung eingeliefert und in normaler, der Prüfungsordnung gemäßer Weise durchbeobachtet worden sind. Dazu kommen dann noch einzelne Stücke, die aus irgend welchen Gründen unvollständig oder zu anderen Zwecken in anderer Weise beobachtet worden sind, wie z. B. zwei der Sternwarte gehörige Langesche Uhren, die mehrere Wochen nur im Liegen beobachtet worden waren. Es lag bei der gegenwärtigen Untersuchung kein Grund vor, derartige abweichende Gangtabellen auszuschließen, weil sie immerhin mit einem Teile der in ihnen enthaltenen Zahlen zu dem Rechnungsprogramme beitragen konnten.

Während die Rechenarbeit schon im Gange war, wurden noch mehrere Uhren eingeliefert, deren Gangtabellen ich mit herangezogen habe, soweit die betreffenden Kollektivreihen noch nicht fertig reduziert waren.

Die Tabelle I (vgl. Anhang!) gibt darüber Aufschluß, wie sich die benutzten Uhren auf die einzelnen Jahrgänge und die beiden Fabrikanten Assmann und Lange verteilen.

Bezeichnung der benutzten Argumente.

§ 8. Um die folgende Darstellung übersichtlicher und kürzer zu gestalten, sollen für häufig wiederkehrende Argumente passende Bezeichnungen und Abkürzungen eingeführt werden. Daher seien die Lagen „Erstes Tragen“, „Liegen“, „Zweites Tragen“, „Hängen“, „Tragen überhaupt“ mit den Buchstaben E bezw. L, Z, H, T bezeichnet. Für die Lagenwechsel werde ich die Bezeichnungen LT, HT, TL, TH verwenden, wobei der erste Buchstabe die vorangehende, der zweite Buchstabe die nachfolgende Lage bezeichnet. Was die Variationen anbelangt, so sollen diese mit V unter Hinzusetzung des betreffenden Lagenbuchstabens benannt werden, sodaß z. B. VX eine reine Variation der Lage X und VXY eine Zwischenvariation des Lagenwechsels XY bezeichnet. Unter GX soll ein mittlerer täglicher Gang der Lage X verstanden werden; es waren dann noch die Differenzen der mittleren Gänge, oder kurz Lagendifferenzen, zu bilden, für die nachstehende Bezeichnungsweise eingeführt sei:

$$A = GL - GH \qquad B = GH - GE \qquad C = GE - GZ$$
$$D = GL - GZ \qquad P = GL - GE \qquad Q = GH - GZ.$$

§ 9. Für die Lage X sind Xa, Xb, Xc, Xd, Xe die fünf aufeinanderfolgenden reinen Variationen dieser Lage. Außerdem wurde dann noch für gewisse Kontrollen die Größe

$$Xf = -Xa - Xb - Xc - Xd - Xe$$

gebildet, sodaß also — Xf den Gangzuwachs zwischen dem ersten und letzten reinen Gange der Lage X bedeutet. Es soll dabei der Kürze wegen Xf stets mit zu den reinen Variationen gerechnet werden, deren Zahl sich dann auf sechs erhöht.

Für den Lagenwechsel XY bedeutet XYt die vorangehende Zwischenvariation (also im angeführten Register stets die erste der eingeklammerten Zahlen): die folgende Zwischenvariation ist mit XYu bezeichnet. Ferner bedeutet XYs die reine Variation unmittelbar vor XYt und XYv die reine Variation unmittelbar hinter XYu; schließlich ist XYw bestimmt durch

$$XYw = -XYs - XYt - XYu - XYv,$$

und dabei soll XYw mit zu den Zwischenvariationen gerechnet werden. Der Kürze wegen werden im folgenden die Größen s, t, u, v, w schlechthin als Zwischenvariationen bezeichnet, wiewohl sachlich nur die Größen t, u als solche gelten.

Bei dem einzelnen normalen Gangregister gibt es also die vier Lagen L, H, E, Z mit den vier mittleren Gängen GL, GH, GE, GZ, deren arithmetisches Mittel mit M bezeichnet sei. Unter den mit L', H', E', Z' benannten Größen sollen dann folgende Differenzen verstanden werden:

$$L' = GL - M \quad H' = GH - M \quad E' = GE - M \quad Z' = GZ - M.$$

Aus diesen Größen L', H', E', Z' des einzelnen Gangregisters wurde nun noch das quadratische Mittel I und das numerische Mittel K gebildet und schließlich unter der Bezeichnung R das absolute Extrem aus den Zahlen L', H', E', Z', sowie unter der Benennung S das absolute Extrem aus den Größen A, B, C, D, P, Q angesetzt.

Eine weitere Bearbeitung der zu den Größen G, I, K, R, S gehörigen Reihen wurde indessen später nicht vorgenommen, sodaß die vorstehende Abkürzungsweise zum Teil nur zum

Verständnisse der nachstehend beschriebenen Zählkarten angeführt ist.

§ 10. Die aufgeführten Größen bilden nun die Argumente der weiterhin zu behandelnden Kollektivreihen. Für diese letzteren soll entsprechend der zugehörigen Lage bezw. Lagenwechsel die Benennung *L, H, E, Z, T* und *LT, HT, TL, TH* eingeführt werden. Diese Reihen zerfallen dann entsprechend in die Reihen der einzelnen Variationen, sodaß z. B. *La* die Reihe der im Liegen beobachteten ersten reinen Variation *a*, *LTs* die Reihe der zum Lagenwechsel *LT* gehörigen Variation *s* bezeichnet. Im folgenden handelt es sich ausschließlich um Kollektivreihen mit zweifacher Verteilung, deren Argumente je zwei Variationen bilden. Aus n Größen sind nun $n(n-1)/2$ Kombinationen zu je zweien möglich, und hiernach ergibt sich, daß die sechs reinen Variationen *a, b, c, d, e, f* fünfzehn, die fünf Zwischenvariationen *s, t, u, v, w* zehn derartige Kombinationen lieferten, wobei die Kombinationen mit *f* und *w* in der Hauptsache nur der Kontrolle wegen angesetzt wurden. Dementsprechend ergaben sich zu jeder Lage fünfzehn und zu jedem Lagenwechsel zehn Kollektivreihen mit doppeltem Argument. Diese Reihen bedurften indessen vor der weiteren Verwendung noch einer gewissen „Reinigung“, d. h. einer Ausscheidung derjenigen Glieder, die nach der Lage der Sache als verfehlt anzusehen sind.

Die Zählkarten.

§ 11. Um zu den Verteilungen der einzelnen Kollektivreihen, auf die sich ja die eigentliche Kollektivuntersuchung aufbaut, zu gelangen, habe ich mich lediglich des Zählkartenverfahrens bedient. Zu dem Zwecke habe ich Zählblätter mit Vordruck benutzt, wobei dann die in dem einzelnen Gangregister enthaltenen Variationen und mittleren Gänge auf ein zugehöriges Zählblatt übertragen wurden, deren jedes elf Felder enthielt. Durch Zerschneiden nach den Feldern ergaben sich aus jedem Zählblatt elf Zählkarten, die sich bei der alsdann vorzunehmenden Auszählung besser handhaben ließen als die unbequem großen Zählblätter. Die fertigen Blätter wurden nach dem Datum der ersten Uhrkorrektion chronologisch geordnet und fortlaufend nummeriert. Jedem Felde wurde außer der betreffenden Blattnummer noch die dem zugehörigen Gangregister entsprechende Lagenfolge sowie das Datum der ersten Uhrkorrektion aufgestempelt. Der übrige Inhalt der einzelnen Felder ist aus folgender Übersicht zu erkennen.

Feld I: Bezeichnung der Uhr nach ihrer Nummer und Name des Fabrikanten sowie Datum der ersten Uhrkorrektion. Die aus Feld I bestehende Kartenreihe blieb während des größten Teiles der Arbeit chronologisch geordnet, um bei etwa auftauchenden Zweifeln als Index zur raschen Auffindung des betr. Gangregisters zu dienen.

Feld II: Variationsgrößen La, Lb, Lc, Ld, Le, Lf.

Feld III, IV, V: Die entsprechenden Größen für die Lagen H, E, Z. Die in Feld II—V aufgezeichneten Größen wurden auf einem mit „Summe" überschriebenen Felde kontrolliert, in das die Summe entsprechender Variationsgrößen der einzelnen Felder eingetragen wurde.

Feld VI: Variationsgrößen THs, THt, THu, THv, THw.

Feld VII, VIII, IX: Die entsprechenden Variationsgrößen für die Lagenwechsel TL, HT, LT. Hierbei ist noch zu bemerken, daß die zu den Lagenwechseln LH und HL gehörigen Zahlen nicht mit ausgezogen worden sind, da nur ein ganz geringer Teil von Gangregistern die Lagenfolgen $TLHT$ und $THLT$ aufwiesen.

Feld X: Die sechsfachen mittleren Gänge $6\,GL$, $6\,GH$, $6\,GE$, $6\,GZ$ (das sechsfache ist genommen, um beim Herausschreiben aus den Gangregistern die Division mit 6 zu vermeiden) nebst den zugehörigen sechsfachen Gangdifferenzen $6\,A$, $6\,B$, $6\,C$, $6\,D$, $6\,P$, $6\,Q$.

Feld XI: Die sechsfachen Ganggrößen $6\,L'$, $6\,H'$, $6\,E'$, $6\,Z'$ nebst den Mitteln $12\,J$ und $24\,K$, sowie den Extremen $6\,R$ und $6\,S$.

§ 12. Wenn eine Gangtabelle die Lage L oder H zweimal enthielt, wurden zwei Blätter angelegt mit teilweise leeren

Feldern. Auch sei noch erwähnt, daß bei negativen Zahlen die Ergänzung zu 1000 oder 100 angesetzt wurde, weil sich dadurch einerseits die vorzunehmenden Kontrollrechnungen erleichterten, andererseits bei der Auszählung eine bequemere Unterscheidung zwischen negativen und positiven Zahlen möglich war, als dies durch das Minus und Pluszeichen der Fall ist.

Um einen gewissen Anhalt für die Sicherheit der errechneten Resultate zu haben, wurde schließlich noch entsprechend der laufenden Nummerierung das gesamte Zählkartenmaterial nach „gerade“ und „ungerade“, also rein zufällig, in zwei Gruppen zerfällt in der Weise, daß Gruppe I die Karten mit allen ungeraden, Gruppe II die Karten mit allen geraden Nummern enthielt. Beide Gruppen zusammen wurden dann als Gruppe III bezeichnet. Bei den Reihen *HT* und *TL* wurde wegen des geringen Umfanges derselben von einer Zerlegung in zwei Gruppen abgesehen und demgemäß die betreffenden Zählkarten als Gruppe III zusammengefaßt. Für die Reihen *L* und *E* endlich schien es später wünschenswert, eine Zerlegung in zwei Gruppen IV und V nach einem anderen Gesichtspunkte vorzunehmen. Die Uhrvergleichungen beginnen entweder mit der Lage *E* oder *L*. Vor der Vergleichung haben nun die Uhren zumeist die Reise von Glashütte bis Leipzig zurückzulegen, deren nachteilige gangstörende Wirkung selbst durch einen vollen Tag Ruhepause, der ihnen vor Beginn der Beobachtung gewährt wird, nicht völlig ausgeglichen wird. Es schien nun später, als bereits die eigentliche Abhängigkeitsuntersuchung im Gange war, zweckdienlich, aus dem erwähnten Grunde bei den Lagen *E* und *L* zu unterscheiden, ob ihnen die Reise unmittelbar vorangeht oder nicht. Daher wurden je nach der Lage in der Vorwoche die Reihen *L* und *E* in zwei Gruppen IV und V zerlegt, indem in der Gruppe IV jedesmal die Zählkarten zusammengefaßt wurden, die zu Gangregistern gehörten, bei denen die Lagen *E* oder *L* in die zweite Vergleichswoche fielen, während die Gruppe V die Zählkarten enthielt, deren zugehörige Gangregister die Lagen *E* oder *L* in der ersten Woche aufwiesen. Es lieferte also die Lagenfolge *ELZH* die Gruppen E_{V} und L_{IV} und die Lagenfolge *LEHZ* die Gruppen L_{V} und E_{IV}.

Die Toleranzen.

§ 13. Die Bearbeitung von Kollektivreihen läßt im allgemeinen nur dann einen dem Rechenaufwande entsprechenden Erfolg erwarten, wenn das Beobachtungsmaterial in sich hinreichend gleichartig ist. Darum war vor Beginn der eigentlichen Rechnung mit den benutzten Gangtabellen eine Sichtung vorzunehmen, da ja einige Uhren darunter sind, die der Hauptmasse der Beobachtungen gegenüber als teilweise verunglückt anzusehen sind. Die Sichtung erfolgte auf Grund gewisser Toleranzen, d. h. bestimmter Grenzen, die von den Zahlen einer Gangtabelle nicht überschritten werden dürfen, wenn die Tabelle als einwandfrei gelten soll. Bei der Krauseschen Bearbeitung waren im Anschlusse an die geltende Prüfungsordnung als Toleranzen die Werte $\pm$ 5.0^s für die Variationen und $\pm$ 4.0^s für die Lagenunterschiede der mittleren Gänge eingeführt und dementsprechend die einzelnen Gangregister vollständig benutzt oder vollständig ausgeschlossen worden, je nachdem sie die genannten Grenzen innehielten oder überschritten. Dieses Verfahren war einigermaßen summarisch und hinsichtlich der angesetzten Toleranzen nicht ganz frei von Willkür, durfte aber trotzdem als zulässig gelten, solange es sich in der Hauptsache darum handelte, auf dem bisher noch unbetretenen Gebiete zunächst erst einmal einen Überblick zu erlangen. Will man indessen Einzelheiten näher verfolgen, so kann man schon aus den von Krause gefundenen Zahlen entnehmen, daß es angezeigt ist, die Toleranzen nicht summarisch anzusetzen, sondern dem Verhalten der einzelnen Kollektivreihen anzupassen.

Aus diesem Grunde habe ich bei der Ausfüllung der Zählblätter zunächst das ganze Material herangezogen, das hier überhaupt in Betracht kommen konnte, und dabei den selbstverständlichen Vorbehalt gemacht, die erforderliche Sichtung nachträglich und von Fall zu Fall vorzunehmen. Dabei ließ sich dann auch dem Umstande Rechnung tragen, daß eine Gangtabelle, die an irgend einer Stelle die weiterhin angegebenen Toleranzen verletzte, darum noch nicht in ihrem ganzen Umfange als unbrauchbar ausgeschieden zu werden brauchte. Beispielsweise konnten ja in dem Falle einer übermäßigen Lagendifferenz der mittleren Gänge immer noch die reinen Variationen unverdächtig und daher benutzbar sein.

§ 14. Um nun diese Toleranzen zweckmäßig festzusetzen, habe ich nach einer noch nicht veröffentlichten Aufzeichnung von Prof. Bruns den nachstehend bezeichneten Weg eingeschlagen.

Stellt man — ohne dabei zunächst eine Gangtabelle vollständig auszuschließen — für die einzelnen Argumente *La* u. s. f. die Verteilungstafeln nebst den zugehörigen Verteilungskurven her, so haben diese „ungekürzten Kurven", wie sich aus der in Tabelle II als Beispiel angeführten Verteilungstafel der Reihe *Ed* entnehmen läßt, im allgemeinen etwa folgendes Aussehen: Zunächst enthält jede Kurve einen ausgedehnten Hauptabschnitt, der aus einer zusammenhängenden Reihe von vollen Teilstrecken besteht und sich — von den bekannten Sprüngen und Zacken abgesehen — sehr nahe der Glockenform des einfachen Exponentialgesetzes anschließt. Bei dem angeführten Beispiel liegt dieser Teil der Verteilung innerhalb der Nummernargumente ± 12. An diesen Hauptabschnitt legt sich dann, meistens auf beiden Seiten, eine Gruppe von isolierten, d. h. durch leere Teilstrecken getrennten Gliedern, deren zugehörige Häufigkeit vorwiegend den Wert Eins besitzt. Betrachtet man nun weiter den Verlauf der Kurven im ganzen, so gelangt man zu der Vorstellung, daß bei dem vorliegenden Material mindestens die extremen Fälle unter den isolierten Gliedern durch eine außergewöhnliche Gangstörung oder auch durch ein außergewöhnliches Zusammenwirken der verschiedenen gangändernden Ursachen oder endlich durch das Hineinspielen einzelner weniger guter Uhren zustande gekommen sind, sodaß man sie also dem Verlaufe des Hauptabschnittes gegenüber als Anomalien anzusehen hat. Um diesen

Gegensatz kurz auszudrücken, sei bei der ursprünglichen ungekürzten Verteilungstafel zwischen einem „Kerne“ und den anliegenden „sporadischen“ Gliedern untershieden, wobei dann die letzteren die außernormalen Fälle umfassen, während der Kern die „gekürzte“ Reihe liefert, die nach Ausscheidung der sporadischen Glieder übrig bleibt.

Die eingeführte Unterscheidung führt zu der Frage, ob man bei der Bearbeitung der vorliegenden Kollektivreihen die sporadischen Glieder mitzunehmen oder wegzulassen habe. Es ist nun leicht ersichtlich, daß die Entscheidung hierüber nicht allgemein, sondern nur von Fall zu Fall gegeben werden kann, und daß sie wesentlich vom Ziele der vorzunehmenden Untersuchung abhängen muß. Soll beispielsweise der derzeitige Stand der Uhrenfabrikation durch das Verhalten der Gänge und Variationen charakterisiert werden, so ist es ganz zweifellos, daß die sporadischen Glieder mit zu berücksichtigen sind, denn da die beobachteten Uhren durchweg mit besonderer Sorgfalt hergestellt und reguliert worden sind, so gehört das gelegentliche Vorkommen von Fehlschlägen sicher zu den Merkmalen, die bei der Beurteilung der technischen Leistungen der Uhrenfabrikation mit ins Auge zu fassen sind. Handelt es sich hingegen, wie im vorliegenden Falle, nicht um ein Urteil, sondern um die Auffindung der gesetzmäßigen Beziehungen, die unter normalen Verhältnissen zwischen den Gängen und Variationen bestehen, so wird man die sporadischen Glieder beiseite lassen, denn sie sind eben gebenüber der Norm, die durch den Verlauf des Kerns gegeben ist, tatsächlich Ausnahmen und würden, wenn man sie mitnähme, die Ergebnisse der Rechnung zweifellos entstellen. Damit gelangt man aber zu der Aufgabe, für die Abgrenzung des Kernes eine annehmbare Vorschrift ausfindig zu machen.

§ 15. Um auf die Lösung dieser Aufgabe einzugehen, erinnere ich zuvörderst an einige allgemeine Sätze der Kollektivmaßlehre.

Bezeichnet man die relativen Häufigkeiten kurz als „Quoten“ und setzt nach Bruns zu dem Argumente x der vorliegenden Kollektivreihen die Größen

$$g = \mathfrak{D}(x) \qquad k = str(x) \qquad h = 1 : k\sqrt{2}$$
$$r = h(x - g)$$

an, so gilt für die zugehörigen Summenfunktionen $\mathfrak{S}(x)$ die Φ-Entwicklung

$$(1) \qquad 2\,\mathfrak{S}(x) - 1 = \Phi(r) + D_3\,\Phi(r)_3 + D_4\,\Phi(r)_4 + \ldots$$

Setzt man ferner

$$U(x) = \mathfrak{S}(g + x) - \mathfrak{S}(g - x),$$

so ist $U(x)$ die Quote der zwischen den Grenzen $g \pm x$ enthaltenen Argumentmenge.

Beachtet man endlich, daß die Φ-Funktionen zu ihrem Index entgegengesetzt gerade oder ungerade sind, so entsteht, wenn man mit der beliebigen positiven Zahl p in $U(x)$ für x den Wert pk setzt, die Gleichung:

$$(2) \qquad U(pk) = \Phi(p : \sqrt{2}) + D_4\,\Phi(p : \sqrt{2})_4 + D_6\,\Phi(p : \sqrt{2})_6 + \ldots,$$

in der die ungeraden Φ durchweg herausfallen. Erteilt man alsdann der Größe p die besonderen Werte

$$\sqrt{3},\ 3,\ 3.5,\ 4,\ 4.5,\ 5,$$

so wird, weil Φ_4 für das Argument $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ verschwindet,

$$\begin{aligned}
U(\sqrt{3}\,k) &= 0.91674 &&+ 14.80\,D_6 + \ldots\\
U(3.0\,k) &= 0.99730 - 0.638\,D_4 &&- 12.79\,D_6 + \ldots\\
U(3.5\,k) &= 0.99953 - 0.220\,D_4 &&- 2.08\,D_6 + \ldots\\
U(4.0\,k) &= 0.99994 - 0.056\,D_4 &&- 0.95\,D_6 + \ldots\\
U(4.5\,k) &= 0.99999 - 0.010\,D_4 &&- 0.26\,D_6 + \ldots\\
U(5.0\,k) &= 1.00000 - 0.002\,D_4 &&- 0.04\,D_6 + \ldots
\end{aligned}$$

Bei der Benutzung dieser Formeln ist nun zu beachten, daß ein Quotenbetrag für die Rechnung gleich Null zu setzen ist, sobald er unter eine gewisse Merklichkeitsgrenze l sinkt, die natürlich von den Umständen abhängt und im vorliegenden Falle sich vornehmlich nach dem Umfange der betrachteten Kollektivreihen richtet. Wenn z. B. wie hier die Umfänge ungefähr den Wert 500 — das gilt von der Gruppe III — besitzen, so genügt schon für l der Betrag 0.001. Bezeichnet man also mit q denjenigen Wert des Faktors p, für den

$$U(pk) = 1 - l \quad \text{oder} \quad 1 - U(pk) = l$$

wird, so kann man sagen, daß die Strecke zwischen den Punkten $g \pm qk$ den Umfang der Kollektivreihe praktisch erschöpft, weil für diese Strecke die Differenz $1 - U$ die Merklichkeitsgrenze l erreicht. Daraus würde dann weiter folgen, daß die Ausdehnung der Kollektivreihe gleich dem $2q$fachen ihrer Streuung zu setzen sei. Diese Bemerkung wenden wir jetzt zur Bestimmung der Kerngrenzen an. Zu diesem Zwecke gehen wir von der Vorstellung aus, daß das vorliegende Material sich in zwei Bestandteile zerlegen lasse; nämlich eine normale Hauptmasse, die die Kerne der Verteilungstafeln erzeugt und in eine kleine Gruppe von außernormalen Gangtabellen, aus der die sporadischen Glieder entspringen. Ferner ziehen wir aus der Annäherung, die zwischen dem Verlaufe der Kerne und dem Exponentialgesetz besteht, den Schluß, daß die einzelnen Argumentwerte durch eine weitgehende Argumentmischung zustande gekommen sind, und zwar ähnlich wie dies etwa bei den Fehlern feinerer Messungen der Fall ist. Eine solche Entstehungsweise läßt sich ja auch von vornherein erwarten, da die Ursachen der Gangänderungen äußerst mannigfaltig und größtenteils von einander unabhängig sind.

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, stellen wir nunmehr folgende Überlegung an. Beruhen die Variationen und Gänge auf einer weitgehenden Argumentmischung, so werden diese Größen bei der einzelnen Uhr, falls das Verhalten des Werkes konstant bleibt, zu Verteilungen führen, die sich nicht merklich von dem Exponentialgesetze unterscheiden. Ist ferner das Uhrenmaterial der Hauptmasse völlig homogen, so werden sich die genannten Verteilungen von Uhr zu Uhr nicht ändern. Infolgedessen werden auch die Verteilungskerne dem Exponentialgesetze gehorchen, d. h. man gewinnt in Formel (1), wenn man sie für die Kerne allein aufstellt, für die D-Koeffizienten unmerkliche Beträge. Sucht man hieraufhin den Wert von q auf, indem man die Merklichkeitsgrenze nicht über den oben genannten Betrag 0.001 hinausgehen läßt, so ergibt sich, daß der Wert $q = 3.0$ zu klein ist, daß dagegen der Wert $q = 3.5$ sicher genügt. Damit käme man zu der Vorschrift, daß die Länge des Kernes gleich dem Siebenfachen seiner

Streuung zu nehmen ist. Rechnet man nun nach diesem Ansatze in der später zu beschreibenden Weise einige Verteilungen als Stichproben durch, so stellt sich heraus, daß die solchergestalt ermittelten Kerngrenzen eher etwas zu eng als zu weit sind, denn die außerhalb dieser Grenzen gelegenen Abschnitte der Verteilungskurven enthalten Glieder, die man nach dem ganzen Aussehen der Kurven eher dem Kerne als den sporadischen Gliedern zuweisen muß.

Das Vorstehende kann nicht sonderlich überraschen, denn das Uhrenmaterial der Hauptmasse ist sicher nicht völlig homogen. Wenn nun aber zwischen den Verteilungsgesetzen, denen die einzelnen Uhren der Hauptmasse mit ihren Variationen und Gängen gehorchen, merkliche Unterschiede bestehen, so hat man es bei der Entstehung der Kerne mit einer Mischung von Verteilungen zu tun, und man weiß, daß ein solcher Mischungsprozeß bei dem vorliegenden Material positive Werte der geraden D-Koeffizienten erzeugen muß, die um so größer ausfallen, je weiter die in der Mischung zusammengefaßten Verteilungen auseinanderliegen. Demzufolge machen wir jetzt die Annahme, daß die Hauptmasse schwach gemischt sei, oder anders ausgedrückt, daß die Koeffizienten D_6, . . . noch unmerklich seien, D_4 hingegen einen merklichen, wenn auch kleinen Wert besitze. Nun hatte der Wert $q = 3.5$ bereits in die Nähe der Kerngrenzen geführt, sodaß für das geltende q ein gewisser Anhaltspunkt vorliegt. Es wurde demgemäß der Ansatz versucht mit $q = 3.0$, 3.5, 4.0 oder mit anderen Worten die Hypothese, daß die Kernlänge gleich der sechs- oder sieben- oder achtfachen Streuung zu nehmen sei. Bei der Bestimmung des wirklich anzunehmenden Wertes von q wurden dann noch zum Vergleiche die von Krause berechneten Streuungen, wie noch späterhin anzuführen sein wird, herangezogen. Zuvor ist jedoch die Anordnung der Rechnung darzulegen, für die als nächstliegender Weg sich der folgende darbietet.

§ 16. Mit einem irgendwie ermittelten genäherten Werte von g und einem nach Gutdünken angestezten Werte von k sucht man die Verteilungszahlen zwischen den Grenzen

$g \pm qk$, wobei im Folgenden q stets für die Zahlwerte 3.0 oder 3.5 oder 4.0 steht, heraus, berechnet aus ihnen direkt die zugehörige Streuung k' und bildet den Quotienten $k : k'$. Darauf wiederholt man die Rechnung mit einem passend abgeänderten k und ermittelt durch Interpolation dasjenige k, für welches der Quotient $k : k'$ den Wert Eins annimmt. Dieses k liefert dann die gesuchten Kerngrenzen, die dem Ansatze $q = 3.0$ oder 3.5 oder 4.0 entsprechen.

Der beschriebene Rechnungsgang wird nun einigermaßen beschwerlich, sobald man, wie hier, eine nicht unbeträchtliche Zahl von Kollektivreihen zu behandeln hat. Erheblich kürzer, wenn auch weniger genau, ist hingegen das genäherte Verfahren, das jetzt hergeleitet werden soll.

Der Voraussetzung nach sind die Koeffizienten $D_6, \ldots$ unmerklich und $U(qk) = 1$. Setzt man zur Abkürzung

$$y = qk \qquad z = k\sqrt{3},$$

so ist

$$U(z) = 0.9167\, U(y),$$

und man erhält den Ansatz

$$U(z) = 0.9167\, U(y) \qquad y = qz : \sqrt{3}, \tag{3}$$

aus dem sich y ohne Schwierigkeiten ermitteln läßt, sobald man die erste dieser beiden Gleichungen noch etwas umgeformt hat, wozu folgender Weg dient.

Man berechnet aus der ungekürzten Verteilungstafel durch Aufsummieren der beobachteten Verteilungszahlen zunächst die entsprechende Summentafel und bezeichnet die entstehenden Summengrößen mit $\mathfrak{S}(x)$, wobei unter x die Wechselpunkte des Argumentes zu verstehen sind. Bildet man daraus die Tafel der Größen

$$W(x) = \mathfrak{S}(g+x) - \mathfrak{S}(g-x)$$

für positive x, so ist $W(x)$ die beobachtete Gliedermenge zwischen den Grenzen $g \pm x$. Denkt man sich diese Rechnung für den irgendwie abgegrenzten Kern wiederholt und bezeichnet die hierbei auftretenden Größen zum Unterschiede mit $\mathfrak{S}(x)_1$ und $W(x)_1$, so wird die Größe

$$W(x)_1 = \mathfrak{S}(g+x)_1 - \mathfrak{S}(g-x)_1$$

offenbar gleich $W(x)$, falls die Punkte $g \pm x$ der Kernstrecke angehören.

Nun unterscheiden sich die Größen W_1 von den in (3) auftretenden U-Größen nur durch einen konstanten Faktor, der offenbar gleich dem Umfange der Kernstrecke ist. Demnach kann man für die Kernstrecke statt (3) jetzt den Ansatz

$$W(z) = 0.9167 \; W(y) \tag{4}$$

$$y = gz : \sqrt{3} \tag{5}$$

zugrunde legen. Hiermit gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen.

Man sucht für $\mathfrak{D}(x)$ einen genäherten Wert auf und wählt für g aus der Reihe der Halbierungs- und Wechselpunkte denjenigen Punkt, der $\mathfrak{D}(x)$ am nächsten liegt. Sodann bildet man aus den Zahlen der Verteilungstafel durch Aufsummieren die Tafel der $W(x)$, wobei das Tafelargument für $W(x)$ so anzusetzen ist, daß die Punkte $g \pm x$ Wechselpunkte der Verteilungstafel darstellen. Nach diesen Vorbereitungen nimmt man für y einen vorläufigen Wert y_1 an, sucht durch geradlinige Interpolation aus der W-Tafel $W(y)_1$ auf, berechnet aus (4) das zugehörige $W(z)_1$ nebst dem entsprechenden z_1 und ermittelt endlich nach (5) für y den verbesserten Wert y_2 vermöge der Gleichung

$$y_2 = qz_1 : \sqrt{3}.$$

Mit y_2 wird die Rechnung, wenn nötig, wiederholt und solange fortgesetzt, bis sie zum Stehen kommt. Das endgültig gewonnene y liefert dann die als Toleranzen zu benutzenden Kerngrenzen in der Gestalt

$$g \pm y = g \pm qk.$$

Der vorstehende Rechnungsgang ist allerdings weniger genau als das zuerst beschriebene Verfahren, weil ein stärkerer zufälliger Sprung, der an der Stelle z dem Werte von $W(z)$ anhaften kann, unausgeglichen und vergrößert in y übergeht. Dieser Umstand ist indessen ohne Belang, weil eine scharfe Bestimmung von y überhaupt nicht in Frage kommen konnte.

Aus dem nämlichen Grunde genügt auch eine geradlinige Interpolation bei $W(y)$ und z. Im übrigen ist das ganze Verfahren, wie nochmals hervorgehoben werden möge, an zwei Voraussetzungen gebunden. Erstens muß die Unterscheidung zwischen einem normalen Kerne und den anliegenden sporadischen Gliedern überhaupt einen vernünftigen Sinn haben, d. h. sachlich berechtigt sein, was ja nicht immer der Fall zu sein braucht. Zweitens müssen die dem Kerne zukommenden Koeffizienten $D_6, \ldots$ unmerkliche Werte besitzen; das will sagen, daß die Hauptmasse der Beobachtungen nicht aus einer Mischung von stark verschiedenen Verteilungen entstanden sein darf, da man sonst noch mindestens bei den Koeffizienten D_6 auf einen merklichen Betrag gefaßt sein müßte. Daher würde vermutlich die ganze Rechnung mit einem Mißerfolge geendigt haben, wenn man die von 1898 angestellten Beobachtungen mit den hier allein benutzten in eine einzige Reihe zusammengeworfen hätte, denn die von Krause berechneten Streuungen zeigen deutlich, daß zwischen den beiden Beobachtungsgruppen ein erheblicher Unterschied besteht.

Da, wie aus dem Gesagten hervorgeht, dem ganzen Verfahren zur Ermittelung der Kerngrenzen immerhin einige Unsicherheit anhaftet, zumal da ja die Rechnung an eine ganze Reihe von Voraussetzungen geknüpft ist, die sicher nicht alle streng erfüllt sind, so schien es bei der endgültigen Entscheidung, welchem von den drei für q angenommenen Werten, mit denen die Rechnung durchgeführt wurde, der Vorzug zu geben sei, zweckdienlich, die von Krause berechneten Streuungen als weiteren Anhalt heranzuziehen. Es hatte sich ja bereits gezeigt, daß der Umfang des Kernes einer Verteilung etwa gleich dem sieben- oder achtfachen Werte ihrer Streuung zu setzen ist. Demzufolge wurde das dreieinhalb- und vierfache der entsprechenden Krauseschen Streuungen ermittelt und dann untersucht, inwieweit diese Zahlen mit den zu den Ansätzen $q = 3.0$, 3.5, 4.0 gehörigen, durch das angewandte Annäherungsverfahren bestimmten Toleranzen übereinstimmten.

Dabei zeigte sich nun, daß die mit $q = 3.5$ berechneten Kerngrenzen nahezu mit den Vierfachen der entsprechenden

Streuungen von Krause übereinstimmten. Es wurden deswegen die zu $q = 3.5$ gehörigen berechneten Werte als Ausgangspunkt zur Bestimmung der „endgültigen" Toleranzen genommen. Eine Ausnahme bilden hierbei nur die Kerngrenzen für J, R, S, K, zu deren Bestimmung der Ansatz $q = 4.0$ maßgebend war, da sonst die Zahl der auszuscheidenden Glieder eine zu große gewesen wäre. Die zu diesen letzteren Größen gehörigen Verteilungen bildeten auch insofern eine Ausnahme, als die entsprechenden Argumentdurchschnitte $\mathfrak{D}(x)$ nicht wie bei den übrigen behandelten Kollektivreihen nahezu den Wert Null, sondern einen von Null beträchtlich verschiedenen Wert hatten. Es war deswegen, ehe an die Bestimmung der Toleranzen gegangen werden konnte, die Berechnung von $\mathfrak{D}(x)$ erforderlich.

Als Einheit bei der Berechnung der Toleranzen wurde die Zehntelsekunde genommen, da ja auch die einzelnen Argumente der Verteilungen in dieser Einheit angesetzt worden waren. Um nun bei der notwendigen Abwerfung der ersten Dezimalen, bis zu der die Rechnung durchgeführt wurde, in einwandfreier Weise vorzugehen, wurde folgendermaßen verfahren. Von den mit dem endgültig angenommenen Werte für q „berechneten" Kerngrenzen wurde nach dem nächsten Wechselpunkte und von diesem aus zum vorangehenden Halbierungspunkte gegangen, dessen zugehöriges Nummernargument dann als „endgültige" Toleranz angenommen wurde. In Tabelle III sind die in dieser Weise ermittelten Kerngrenzen für die einzelnen Kollektivreihen aufgeführt. Zur Erklärung der dort gemachten Zusammenstellung sind noch folgende Einzelheiten mitzuteilen. Um für

$$P = L - E \qquad D = L - Z,$$

d. h. also für die Lagendifferenzen $L - T$ gleiche Toleranzen zu bekommen, wurde aus den zugehörigen „berechneten" Kerngrenzen das Mittel genommen und aus der damit gewonnenen Zahl die „endgültige" Toleranz festgelegt. Dasselbe gilt auch für

$$B = H - E \qquad Q = H - Z,$$

also für die Lagendifferenzen $H - T$.

Aus demselben Grunde wurde bei den Lagen E und Z in der nämlichen Weise verfahren, indem auch hier das Mittel aus entsprechenden Größen für die weitere Festsetzung maßgebend war.

Bei Ermittelung der Toleranzen für die Zwischenvariationen XYs und XYv waren die Identitäten

$$XYs \equiv Xe \qquad XYv \equiv Ya$$

zu beachten und entsprechend gleiche Werte anzusetzen.

Betrachtet man nun die von mir angesetzten Toleranzen — die größeren Werte, die für die Variationsgrößen Xf, XYw gefunden wurden, dürfen bei der Bedeutung dieser letzteren nicht sonderlich überraschen — etwas näher und vergleicht sie etwa mit den seinerzeit von Krause benutzten summarischen Werten, die ja mit den Zahlen, die die Prüfungsordnung als äußerste einzuhaltende Grenze hinstellt, übereinstimmen, so zeigt sich, daß die hier gezogenen Grenzen bei weitem enger sind, als die dort aufgestellten, wenn man von der Ausnahme absieht, die die Variationen HTt und THt machen, die bei Krause oberhalb 5.0^s ausgeschlossen wurden. Die Tatsache, daß die Zahl der auf Grund der angesetzten Toleranzen auszuscheidenden Beobachtungswerte im Verhältnis zu der beibehaltenen Gesamtmenge eine geringe war, dürfte ein Beweis für die Güte des Beobachtungsmaterials sein, das für die gegenwärtige Untersuchung zur Verfügung stand.

Die numerischen Elemente.

§ 17. Nach Maßgabe der in Tab. III zusammengestellten Toleranzen wurde nunmehr die erforderliche Reinigung des Zählkartenmaterials vorgenommen und demzufolge diejenigen Karten ausgeschlossen, die Argumente enthielten, welche die vorgeschriebenen Grenzen überschritten. Von den Zwischenvariationen XY wurden außerdem noch diejenigen Karten ausgeschieden, bei denen die zur entsprechenden reinen Lage

X oder Y gehörigen mittleren Gänge auszuschließen waren, um dadurch zu verhindern, daß die zu einem Lagenwechsel gehörigen an sich normalen Beobachtungswerte benutzt wurden, wiewohl die vorangehenden oder nachfolgenden reinen Gänge außernormale Werte aufwiesen.

Die Auszählungen wurden, soweit sie sich auf die Reihen der Variationen bezogen, sämtlich nach doppeltem Argument vorgenommen entsprechend den aus den reinen Variationen möglichen fünfzehn und den aus den Zwischenvariationen möglichen zehn Kombinationen zu je zweien. Dadurch erhielt man jede einfache Verteilung in mehrfacher Weise, sodaß sich eine durchgreifende Kontrolle der Auszählung ergab. Die einzelnen Verteilungen wurden auf passend angelegten „Zählbögen" eingetragen, auf denen dann noch durch Summation der zu gleichem Nummernargument $x \pm y$ gehörigen Häufigkeitszahlen die Verteilungen für die Summe und Differenz der betreffenden zwei Variationen aufgestellt wurde.

Bei einer genaueren Durchsicht dieser Verteilungen für die Argumentsummen und -differenzen zeigten sich nun noch einige Werte, die vom Kerne der Verteilung durch mehr denn sechs leere Teilstrecken getrennt und deswegen für die vorliegende Rechnung sicher als sporadisch anzusehen waren. Sollte daher eine Entstellung des Endresultates durch diese abweichenden Glieder vermieden werden, so schien es nötig, die zugehörigen Karten nachträglich noch auszuschließen und die bereits beendeten Auszählungen dementsprechend zu korrigieren. Bei der Reihe L, die zuerst in Angriff genommen wurde, geschahen diese nachträglichen Ausschließungen nach dem „Augenmaß", indem für die Ausscheidung eines Wertes die Zahl der leeren Teilstrecken maßgebend war, die ihn vom Kerne trennte. Dieses nicht ganz willkürfreie Vorgehen wurde den später bearbeiteten Reihen aufgegeben, indem bei diesen aus den erhaltenen Verteilungen zunächst die vorläufigen Streunngen berechnet und diejenigen Karten mit Werten, welche das dreieinhalbfache der entsprechenden Streuung überschritten, ausgeschlossen wurden. Eine an die vorläufigen Elemente angebrachte Reduktion ergab dann die endgültigen Zahlen.

§ 18. Was nun die Berechnung der numerischen Elemente anbelangt, so konnte ich mich, da ja, wie schon gezeigt, die hierher gehörigen Verteilungen sich sehr nahe dem einfachen Exponentialgesetze anschließen, auf die niedrigsten Elemente, Argumentdurchschnitt und Streuung, beschränken. Für die weitere Untersuchung war dann noch die Berechnung der Größe $[x, y]$ erforderlich, die durch nachstehende Gleichung definiert ist.

$$[x, y] = \mathfrak{D}(xy) - \mathfrak{D}(x)\,\mathfrak{D}(y).$$

Aus dieser Definitionsgleichung folgen dann für das Rechnen mit dem Symbol $[\ldots, \ldots]$ folgende Relationen:

$$[x, y] = [y, x]$$
$$[x, x] = str\,(x)^2$$
$$[ax, y] = a\,[x, y]$$
$$[x, y \pm z] = [x, y] \pm [x, z],$$

von denen späterhin Gebrauch zu machen sein wird.

Bei der numerischen Bestimmung der Elemente habe ich mich der Summenmethode (I. Form) bedient und dabei, soweit als möglich, die Rechenmaschine verwendet, deren Dienste mir umsomehr zu statten kamen, als ich der sich darbietenden durchgreifenden Kontrollen wegen ohne jede Abkürzung rechnete. In Tabellen IV—IX gebe ich zunächst eine Zusammenstellung der Größen $m^2[x, y]$ für die einzelnen Reihen der reinen Variationen, wo m den Umfang der betr. Kollektivreihe bedeutet. Als Einheit gilt die Zehntelsekunde. Da diese Zahlen nur Zwischengrößen für die weitere Rechnung bilden, so ist der Faktor m^2 beibehalten worden; es ist aber zum Vergleiche der einzelnen Gruppen unter einander am Anfange jeder Tabelle der Umfang der betreffenden Reihen angegeben. Tabelle X—XIII enthält die entsprechenden Zahlen für die Reihen der Zwischenvariationen.

Zum Vergleiche mit den von Krause berechneten Zahlen sind in Tabelle XIV—XVII die von mir ermittelten Argumentdurchschnitte und Streuungen für die Reihen der reinen Variationen zusammengestellt. Es zeigt sich hierbei eine nahe Übereinstimmung mit den von Krause unter Periode B mitgeteilten Werten: das stand auch von vornherein zu erwarten, da der größte Teil des in die Periode B gehörigen Beobachtungsmaterials auch von mir herangezogen wurde. In Tabelle XVIII—XXI sind die entsprechenden Elemente für die Reihen der Zwischenvariationen angeführt. Als Einheit der mitgeteilten Zahlen gilt auch hier die Zehntelsekunde.

Die Untersuchung der Abhängigkeit.

§ 19. Wie schon eingangs der Arbeit erwähnt wurde, war bereits von Krause eine Abhängigkeit zwischen den Variationen der Taschenuhren nachgewiesen worden und zwar auf Grund des Kriteriums, welches verlangt, daß im Falle der Unabhängigkeit zwischen den Variationen x, y

$$str\,(x \pm y)^2 = str\,(x)^2 \pm str\,(y)^2$$

ist. Diese Bedingung wird nun weder durch die von Krause noch die von mir berechneten Streuungen erfüllt, indem die beiden Seiten der Gleichung, wenn man für x und y die einzelnen Variationen setzt, recht merklich voneinander verschiedene Werte annehmen. Noch deutlicher tritt die Abhängigkeit der Variationen zu Tage, wenn man etwa die fünf reinen Variationen a, b, c, d, e einer Lage gleichzeitig ins Auge faßt und auf sie obiges Kriterium in erweiterter Form anwendet, wonach

$$str\,(a + b + c + d + e)^2 = str(a)^2 + str(b)^2 + str(c)^2 + str(d)^2 + str(e)^2$$

sein müßte. In diesem Falle ist der Unterschied zwischen rechts und links noch weit beträchtlicher. Hieraus folgt, daß zwischen den Variationen eine Abhängigkeit besteht.

Es könnte nun der Fall sein, daß zwar die Variationen abhängig untereinander wären, während die Gänge selbst unabhängig voneinander variierten. Daß dem nicht so ist, geht aus folgender Überlegung hervor.

Für den Fall der Unabhängigkeit zwischen den Argumenten x, y einer Kollektivreihe ist fürs erste erforderlich, daß die bereits oben definierte Größe

$$[x, y] = \mathfrak{D}(xy) - \mathfrak{D}(x)\,\mathfrak{D}(y)$$

den Wert Null annimmt. Wenden wir dies auf die Uhrgänge $g_1, g_2 \ldots g_8$ an, so müßten, wenn diese unabhängig voneinander wären, die Größen $[g_1, g_2]$, $[g_2, g_3]$, u. s. f. sämtlich verschwinden, sodaß dann folgende Gleichungen erfüllt wären

$$[b, f] = [g_3 - g_2, g_1 - g_6] = 0$$
$$[c, f] = [g_4 - g_3, g_1 - g_6] = 0$$
$$[d, f] = [g_5 - g_4, g_1 - g_6] = 0.$$

Nun haben aber die von mir für die einzelnen Lagen berechneten Größen $[b, f]$ usw. stark von Null abweichende Beträge, und daraus ist zu schließen, daß auch eine Abhängigkeit zwischen den Gängen besteht.

§ 20. Bezüglich des Gesetzes dieser Abhängigkeit ist man zunächst völlig im unklaren, und es handelt sich, will man demselben näher nachgehen, nur um Versuche, denen irgend welche Hypothesen zugrunde liegen. Je besser dann die auf Grund der zu machenden Annahmen gefundenen Resultate mit den durch die Beobachtung gegebenen Zahlen im Einklange stehen, umso berechtigter und zuverlässiger kann geschlossen werden, daß eine Abhängigkeit in der angenommenen Art besteht.

Im folgenden soll nun eine Untersuchung durchgeführt werden, die durchaus annehmbare Resultate geliefert hat und auf der Hypothese einer konstanten Nachwirkung beruht. Zunächst sind aber einige allgemeine Sätze der Kollektivmaßlehre hier anzuführen.

Zu diesem Zwecke fassen wir eine zweifach ausgedehnte Kollektivreihe $K(x, y)$ mit dem Argumentpaare x, y und der Summenfunktion $\mathfrak{S}(x, y)$ ins Auge; die den Einzelargumenten x und y entsprechenden Summenfunktionen seien $\mathfrak{S}(x)$ und $\mathfrak{S}(y)$. Mit den Parametern c, h, e, k bilden wir nunmehr die Hilfsargumente

$$u = h(x - c) \qquad v = k(y - e)$$

und setzen nach Bruns [Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre § 110 (16a) und § 111 (22)] die Reihenentwicklung

$$4\{\mathfrak{S}(x,y) - \mathfrak{S}(x)\,\mathfrak{S}(y)\} = \sum_p \sum_q \varDelta(p,q)\,\Phi(u)_p\,\Phi(v)_q$$

an, worin die Summationen nach p und q von Null an zu laufen haben. Die rechts stehenden Größen $\varDelta(p,q)$ bestimmen sich aus der Relation

$$\varDelta(p,q) = \mathfrak{D}[\mathfrak{R}(u)_p\,\mathfrak{R}(v)_q] - \mathfrak{D}[\mathfrak{R}(u)_p]\,\mathfrak{D}[\mathfrak{R}(v)_q],$$

die sich mit Hülfe des Symbols $[\ldots,\ldots]$ auch schreiben läßt

$$\varDelta(p,q) = [\mathfrak{R}(u)_p,\ \mathfrak{R}(v)_q].$$

Sind nun die Argumente x und y der betrachteten Reihe $K(x,y)$ voneinander unabhängig, so ist, wie man weiß,

$$\mathfrak{S}(x,y) = \mathfrak{S}(x)\,\mathfrak{S}(y).$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die vorstehende Reihenentwicklung, daß in diesem Falle der Unabhängigkeit alle Koeffizienten $\varDelta(p,q)$ verschwinden müssen. Diese Bedingung zieht, da

$$\varDelta(1,1) = hk[x,y]$$

ist, fürs erste nach sich, daß die Gleichung

$$[x,y] = 0$$

erfüllt sein muß. Umgekehrt darf man indessen im allgemeinen aus dem Nullwerden von $[x,y]$ noch nicht auf das Verschwinden der übrigen $\varDelta(p,q)$ und damit auf Unabhängigkeit zwischen x und y schließen.

Nunmehr gehen wir von der Annahme aus, daß x und y nicht unabhängig voneinander seien, sondern daß eine bestimmte Abhängigkeit zwischen den beiden Argumenten bestehe. Dabei sei immer y von x, nicht aber x von y abhängig, wie dies bei den Gängen und Variationen der Uhren der Fall ist, wo der vorangehende Tag stets auf den nachfolgenden, nicht aber der nachfolgende auf den vorangehenden Tag nachwirkt, und es sei das Gesetz der Abhängigkeit darstellbar durch folgenden linearen Gleichungsansatz

(1) $$y = nx + z,$$

wo n eine Konstante bedeute, die sich so ermitteln lasse, daß die rechts stehende Größe z von x unabhängig ist. Die Abhängigkeit zwischen den Argumenten x, y sei also so, daß y stets ein bestimmtes Vielfaches von x ist plus einer Größe z, die von x unabhängig nach Zufall variiert.

Ferner verlaufe die Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x, y)$ der Reihe $\mathrm{K}(x, y)$ nach dem einfachen Exponentialgesetze und sei daher vermittelst der Konstanten C, a, b, c darstellbar in der Form

(2) $$\mathfrak{V}(x, y) = C\, exp\, (ax^2 + bxy + cy^2).$$

Diese Gleichung läßt sich mit Hülfe der Konstanten f, g, n auch schreiben in der Gestalt

(3) $$\mathfrak{V}(x, y) = C\, exp\, (fx^2 + g\,(y - nx)^2),$$

wobei die Beziehungen, die zwischen a, b, c und f, g, n bestehen, leicht erkennbar sind.

Aus einem den vorstehenden Gleichungen entsprechenden Verlaufe der Verteilungsfunktion folgt nun, daß in erster Annäherung die Argumentpaare x, y, die dem Ansatze

$$\mathfrak{V}(x, y) = \text{constans}$$

folgen, d. h. für die die Verteilungsfunktion denselben konstanten Wert besitzt, sich in konzentrischen koaxialen und ähnlichen Ellipsen anordnen.

Bilden wir jetzt für die Reihe $\mathrm{K}\,(x, z)$, wo z sich nach (1) bestimmt durch

$$z = y - nx$$

die zugehörige Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x, z)$, so ist diese mit Rücksicht auf (3) darstellbar in der Form

$$\mathfrak{V}(x, z) = C\, exp\, (fx^2 + gz^2).$$

Dabei sind nun x und z unabhängig voneinander, woraus nach dem Gesagten folgt, daß die zugehörigen $\Delta\,(p, q)$ verschwinden und daher die Bedingung

$$[x, z] = 0$$

erfüllt sein muß.

Liegt also für die Argumente x, y eine Verteilungsfunktion vor, die der Gleichung (2) entsprechend verläuft, und wird in der zwischen y und x geltenden linearen Beziehung

$$x = y - nx$$

die Konstante n so gewählt, daß die Größe $[x, z]$ verschwindet, so kann man umgekehrt schließen, daß x und z unabhängig voneinander sind und sonach sämtliche zur Reihe $K(x, z)$ gehörigen Koeffizienten $\Delta(p, q)$ unmerkliche Beträge annehmen. Die Konstante n bestimmt sich dann aus der Gleichung

$$[x, y - nx] = 0,$$

aus welcher folgt

$$n = [x, y] : str(x)^2.$$

Da nun, wie ein Blick auf die betreffenden Verteilungstafeln lehrt, die für das weitere in Betracht kommenden Verteilungen der Variationen genähert der Darstellung (2) entsprechend verlaufen, so kann man nach dem obigen schließen, daß, sofern die Bedingung

$$[x, z] = 0$$

erfüllt ist, die übrigen Δ-Koeffizienten der Verteilung $V(x, z)$ praktisch den Wert Null annehmen. Aus diesem Grunde war es für die folgende Untersuchung ausreichend, lediglich von dieser letzten Bedingungsgleichung auszugehen.

§ 21. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wenden wir uns jetzt der Untersuchung der reinen Uhrgänge zu. Dabei bezeichnen wir die Konstante n, die sich dem vorstehenden entsprechend so bestimmte, daß z und x unabhängig voneinander sind, als den Nachwirkungskoeffizienten oder den Modul der Nachwirkung, denn sie gibt an, mit welchem Betrage y von x abhängt, oder — wenn wir unter x und y etwa zwei Uhrgänge verstehen — wie stark der Gang x auf den Gang y nachwirkt entsprechend dem Ansatze

$$y = nx + z$$

wo die von x unabhängige Größe z einen hinzukommenden unregelmäßigen Bestandteil bedeutet.

Weiterhin wollen wir unter dem normalen Gange einer Uhr den Gang verstehen, welcher eintreten würde, wenn keinerlei störende Ursachen vorhanden wären, was einem völlig gleich- und regelmäßigen Gehen der Uhr entspräche. Die zugehörigen Variationen hätten dann sämtlich den Wert Null. Da indessen gangändernde Ursachen, durch welche eben die Gangänderungen oder Variationen hervorgerufen werden, vorhanden sind, so wollen wir als Gangausschläge die durch sie hervorgerufenen Abweichungen von dem normalen Gange ansehen. Aus dem Gesagten geht hervor, daß das, was bisher als Gang bezeichnet wurde, sich zusammensetzt aus dem normalen Gange und dem betreffenden Gangausschlag. Im folgenden ist nun stets mit Gangdifferenzen zu rechnen; somit fällt der normale Gang aus der Rechnung, und wir haben es, wenn wir zunächst nur die reinen Gänge ins Auge fassen, mit den sechs Gangausschlägen $g_1, g_2 \ldots . g_6$ zu tun, welche abhängig voneinander variieren.

Nunmehr machen wir die Annahme, daß sich zwischen aufeinanderfolgenden Gangausschlägen der Modul der Nachwirkung nicht ändere, sodaß wir, wenn wir den Nachwirkungskoeffizienten wie oben mit n bezeichnen, folgende sechs Gleichungen ansetzen können:

$$\begin{aligned}
g_1 &= g_1 \\
g_2 &= ng_1 + x_1 \\
g_3 &= ng_2 + x_2 = n^2 g_1 + nx_1 + x_2 \\
g_4 &= ng_3 + x_3 = n^3 g_1 + n^2 x_1 + nx_2 + x_3 \\
g_5 &= ng_4 + x_4 = n^4 g_1 + n^3 x_1 + n^2 x_2 + nx_3 + x_4 \\
g_6 &= ng_5 + x_5 = n^5 g_1 + n^4 x_1 + n^3 x_2 + n^2 x_3 + nx_4 + x_5.
\end{aligned}$$

Hierin bedeuten die Größen $x_1, x_2 \ldots . x_5$ die dem obigen z entsprechenden unregelmäßigen und von g_1 unabhängigen Bestandteile. Aus diesen Gleichungen folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned}
g_1 - g_2 &= (1-n)g_1 - x_1 \\
g_2 - g_3 &= n(1-n)g_1 + (1-n)x_1 - x_2 \\
g_3 - g_4 &= n^2(1-n)g_1 + n(1-n)x_1 + (1-n)x_2 - x_3 \\
g_4 - g_5 &= n^3(1-n)g_1 + n^2(1-n)x_1 + n(1-n)x_2 + (1-n)x_3 - x_4 \\
g_5 - g_6 &= n^4(1-n)g_1 + n^3(1-n)x_1 + n^2(1-n)x_2 + n(1-n)x_3 \\
&\quad + (1-n)x_4 - x_5
\end{aligned}$$

$$g_1 - g_3 = (1 - n^2)g_1 - nx_1 - x_2$$
$$g_2 - g_4 = n(1 - n^2)g_1 + (1 - n^2)x_1 - nx_2 - x_3$$
$$g_3 - g_5 = n^2(1 - n^2)g_1 + n(1 - n^2)x_1 + (1 - n^2)x_2 - nx_3 - x_4$$
$$g_4 - g_6 = n^3(1 - n^2)g_1 + n^2(1 - n^2)x_1 + n(1 - n^2)x_2 + (1 - n)x_3 - nx_4 - x_5$$

$$g_1 - g_4 = (1 - n^3)g_1 - n^2x_1 - nx_2 - x_3$$
$$g_2 - g_5 = n(1 - n^3)g_1 + (1 - n^3)x_1 - n^2x_2 - nx_3 - x_4$$
$$g_3 - g_6 = n^2(1 - n^3)g_1 + n(1 - n^3)x_1 + (1 - n^3)x_2 - n^2x_3 - nx_4 - x_5$$

$$g_1 - g_5 = (1 - n^4)g_1 - n^3x_1 - n^2x_2 - nx_3 - x_4$$
$$g_2 - g_6 = n(1 - n^4)g_1 + (1 - n^4)x_1 - n^3x_2 - n^2x_3 - nx_4 - x_5$$

$$g_1 - g_6 = (1 - n^5)g_1 - n^4x_1 - n^3x_2 - n^2x_3 - nx_4 - x_5.$$

Zu den sechs Gangausschlägen $g_1 \ldots g_6$ der einzelnen Uhr für eine reine Lage ergibt sich somit das vorstehende Gleichungssystem. Faßt man nun statt der einzelnen Uhr die Gesamtheit aller in der betr. Lage beobachteten Uhren ins Auge, so ergeben sich so viel Gleichungssysteme, als die Anzahl der beobachteten Uhren beträgt. Entsprechende Gleichungen kann man dann für sich als eine Kollektivreihe behandeln. Daraus ergibt sich dann, wenn wir noch annehmen, daß die unregelmäßigen Bestandteile $x_1, x_2 \ldots x_5$ durchgängig gleiche Streuung besitzen, d. h. daß

$$str\,(x_i)^2 = X \qquad i = 1, 2 \ldots 5$$

sei und abkürzend schreiben

$$str\,(g_1)^2 = G$$
$$(ik) = str\,(g_i - g_k)^2, \quad i = 1, 2 \ldots 5, \quad k = 2, 3 \ldots 6$$

folgende Gestalt für die Gleichungen der Nachwirkung:

$$(12) = (1 - n)^2 G + X$$
$$(23) = n^2(1 - n)^2 G + (1 - n)^2 X + X$$
$$(34) = n^4(1 - n)^2 G + n^2(1 - n)^2 X + (1 - n)^2 X + X$$
$$(45) = n^6(1 - n)^2 G + n^4(1 - n)^2 X + n^2(1 - n)^2 X + (1 - n)^2 X + X$$
$$(56) = n^8(1 - n)^2 G + n^6(1 - n)^2 X + n^4(1 - n)^2 X + n^2(1 - n)^2 X + (1 - n)^2 X + X$$

$$(13) = (1-n^2)^2 G + n^2 X + X$$
$$(24) = n^2(1-n^2)^2 G + (1-n^2)^2 X + n^2 X + X$$
$$(35) = n^4(1-n^2)^2 G + n^2(1-n^2)^2 X + (1-n^2)^2 X + n^2 X + X$$
$$(46) = n^6(1-n^2)^2 G + n^4(1-n^2)^2 X + n^2(1-n^2)^2 X + (1-n^2)^2 X + n^2 X + X$$

$$(14) = (1-n^3)^2 G + n^4 X + n^2 X + X$$
$$(25) = n^2(1-n^3)^2 G + (1-n^3)^2 X + n^4 X + n^2 X + X$$
$$(36) = n^4(1-n^3)^2 G + n^2(1-n^3)^2 X + (1-n^3)^2 X + n^4 X + n^2 X + X$$

$$(15) = (1-n^4)^2 G + n^6 X + n^4 X + n^2 X + X$$
$$(26) = n^2(1-n^4)^2 G + (1-n^4)^2 X + n^6 X + n^4 X + n^2 X + X$$

$$(16) = (1-n^5)^2 G + n^8 X + n^6 X + n^4 X + n^2 X + X$$

Zur weiteren Vereinfachung dieser Gleichungen führen wir die Größen Y und Z durch folgende Beziehungen ein:

$$X = Y(1-n^2) \qquad G = Y + Z.$$

Es ergibt sich dann:

$$(12) = 2(1-n)Y + (1-n)^2 Z$$
$$(23) = 2(1-n)Y + n^2(1-n)^2 Z$$
$$(34) = 2(1-n)Y + n^4(1-n)^2 Z$$
$$(45) = 2(1-n)Y + n^6(1-n)^2 Z$$
$$(56) = 2(1-n)Y + n^8(1-n)^2 Z$$

$$(13) = 2(1-n^2)Y + (1-n^2)^2 Z$$
$$(24) = 2(1-n^2)Y + n^2(1-n^2)^2 Z$$
$$(35) = 2(1-n^2)Y + n^4(1-n^2)^2 Z$$
$$(46) = 2(1-n^2)Y + n^6(1-n^2)^2 Z$$

$$(14) = 2(1-n^3)Y + (1-n^3)^2 Z$$
$$(25) = 2(1-n^3)Y + n^2(1-n^3)^2 Z$$
$$(36) = 2(1-n^3)Y + n^4(1-n^3)^2 Z$$

$$(15) = 2(1-n^4)Y + (1-n^4)^2 Z$$
$$(26) = 2(1-n^4)Y + n^2(1-n^4)^2 Z$$

$$(16) = 2(1-n^5)Y + (1-n^5)^2 Z$$

In den vorstehenden Gleichungen sind nun n, Y, Z vorläufig als unbekannt anzusehen, während die links stehenden

Größen (ik) teilweise schon bekannt oder auf Grund der berechneten Elemente ermittelbar sind. Es ist hierbei nur die Seite 9 gemachte Bemerkung zu berücksichtigen, wonach die Differenz zweier Gänge stets übereinstimmt mit der Summe der dazwischenliegenden Variationen. Da nun zu dem normalen Gange die Variation Null gehört, so gilt dieser Satz auch für die Differenz zweier Gangausschläge; demzufolge ist

$$(12) = str(g_1 - g_2)^2 = str(a)^2, \quad (13) = str(g_1 - g_3)^2 = str(a+b)^2,$$
$$(14) = str(g_1 - g_4)^2 = str(a+b+c)^2, \quad \text{usw.}$$

Daraus ergibt sich noch, daß die angesetzten Gleichungen in fünf Gruppen zerfallen je nach der Zahl der Variationen, die zur Bestimmung der zugehörigen Koefffzienten (ik) nötig sind. Nun waren außer den Streuungsquadraten der Variationen auch die der Summe von je zwei Variationen unmittelbar bei der Reduktion der einzelnen Kollektivreihen berechnet worden, und es handelte sich noch um die Bestimmung der Streuungsquadrate für die Summe von je drei und mehr Variationen. Hierzu dienten die bereits ermittelten $m^2[x,y]$, aus denen mit Hülfe der allgemeinen Entwicklung

$$m^2 str(p+q+r+\cdots)^2 = m^2 str(p)^2 + m^2 str(q)^2 + \cdots + 2\,m^2[p,q] + 2\,m^2[p,r] + \cdots + 2\,m^2[q,r] + \cdots$$

unter Abwerfung des Faktors m^2 die übrigen Koeffizienten (ik) berechnet wurden. Um einen Überblick über den Verlauf dieser Zahlen zu geben, sind als Beispiel in Tabelle XXII die Streuungsquadrate für die Reihe L_{III} aufgeführt.

Die linken Seiten der oben aufgeführten fünfzehn Gleichungen für die Nachwirkung werden somit von bekannten Beobachtungswerten gebildet, wobei noch zu beachten ist, daß diese Gleichungen vor weiterer Verwendung auf gleiches Gewicht zu bringen, d. h. auf die Streuung Eins zu reduzieren sind. Es erwächst nun die Frage, ob sich die Unbekannten n, Y, Z so bestimmen lassen, daß die Gleichungen durch sie hinreichend befriedigt werden, d. h. ob man überhaupt berechtigt ist, den obigen Gleichungsansatz zu machen, der sich auf die beiden Voraussetzungen gründet, daß die Nachwirkung eine konstante ist und daß die unregelmäßigen Bestandteile

x_i gleiche Streuung besitzen. Wäre der Nachwirkungsmodul n bekannt, so handelte es sich bei der Entscheidung dieser Frage lediglich um die Ermittelung von Y und Z und um die Untersuchung der übrigbleibenden Widersprüche. Bezüglich des Wertes von n kann man aber vor der Hand nur sagen, daß derselbe nicht größer als Eins sein wird; im übrigen ist man auf Vermutungen angewiesen, und man kann zu dem tatsächlich geltenden Betrage nur gelangen, indem man verschiedene Ansätze für n durchrechnet. Dabei verfährt man in der Weise, daß man mit einem nach Gutdünken angenommenen n die Koeffizienten von Y und Z berechnet, die Unbekannten nach einem Ausgleichungsverfahren bestimmt und nach Einsetzung der hierfür gefundenen Werte die übrigbleibenden Widersprüche „Beobachtung minus Rechnung" aufstellt. Mit einem passend abgeänderten n ist dann die Rechnung zu wiederholen, bis man schließlich einen Wert gefunden hat, der zusammen mit dem zugehörigen Y und Z die Gleichungen am besten befriedigt, d. h. für welchen die Widersprüche ein Minimum sind. Die durch dieses Verfahren gegebene Bestimmung der Größen n, Y, Z wird aber nur solange überhaupt einen Sinn haben und deswegen berechtigt sein, solange die einzelnen Widersprüche „Beobachtung minus Rechnung" innerhalb annehmbarer Grenzen liegen.

§ 22. Bevor ich indessen die von mir durchgeführte Rechnung näher darlege, ist auf die an den Koeffizienten der Nachwirkungsgleichungen vorgenommene Reduktion auf gleiches Gewicht einzugehen. Dabei war nun eigentlich, um die linke Seite auf die Streuung Eins zu bringen, jede Gleichung durch ihre linke Seite zu dividieren. Da indessen innerhalb einer Gleichungsgruppe die Streuungsquadrate (ik), wie ja auch bei ihrer Entstehungsart anzunehmen war, wenig voneinander abwichen, so konnte für die Koeffizienten der nämlichen Gruppe derselbe Divisor angesetzt werden. Bezeichnet man mit A_1, $A_2 \ldots . A_5$ die arithmetischen Mittel aus den Termen (ik) der fünf Gleichungsgruppen, so zeigte sich, daß dieselben nahezu folgendem linearen Gleichungsansatze entsprechend verliefen

$$A_1 = p$$
$$A_2 = p + q$$
$$A_3 = p + 2q$$
$$A_4 = p + 3q$$
$$A_5 = p + 4q$$

Hierin wurden die rechts auftretenden Größen p, q nach dem Ausgleichungsverfahren von Cauchy ermittelt. Dabei hatte nun der Quotient $q:p$ für alle Lagen nahezu ein und denselben konstanten Wert, und da außerdem die entsprechenden Streuungsquadrate der einzelnen Lagen untereinander nahe Übereinstimmung zeigten, so konnten summarisch die Gewichtsdivisoren für sämtliche Lagen gleich angesetzt werden. Deswegen wurden nunmehr im letzten Gleichungssystem für die Größen $A_1, A_2 \ldots A_5$ die Mittel aus den entsprechenden Werten der einzelnen Lagen gesetzt und p, q in der erwähnten Weise bestimmt. Aus den zugehörigen „berechneten" Beträgen $A_1, A_2 \ldots A_5$ wurden durch Abrundung die folgenden fünf Zahlen angenommen, durch die dann die Koeffizienten einer Gleichungsgruppe entsprechend zu dividieren waren.

1.	Gleichungsgruppe:	17
2.	„	26
3.	„	34
4.	„	42
5.	„	50.

In Tabelle XXIII sind die auf diese Weise reduzierten Streuungsquadrate für die einzelnen Reihen der reinen Lagen zusammengestellt.

§ 23. Um nun für das weitere einen Anhalt bezüglich des Wertes von n zu gewinnen, wurden für die Beträge

$$n = 0.2,\ 0.3,\ 0.4 \ldots\ldots 0.8$$

die Koeffizienten der Unbekannten Y, Z angesetzt und dem vorstehenden entsprechend reduziert. Alsdann wurden — vorläufig nur für die Gruppe III jeder Lage — nach dem Ausgleichungsverfahren von Cauchy Y und Z aus den Gleichungen für die Nachwirkung eliminiert und die übrigbleibenden Widersprüche „Beobachtung minus Rechnung" ermittelt. Außerdem wurden noch die Summen der absoluten Beträge der Widersprüche berechnet. Der Verlauf dieser Widerspruchssummen für die einzelnen n, der auch graphisch dargestellt wurde, ließ dann deutlich ein Minimum erkennen, und zwar zeigte sich, daß der zu diesem Minimum gehörige Wert von n für die Lagen L, H, Z zwischen $n = 0.5$ und $n = 0.7$, für die Lage E hingegen zwischen $n = 0.6$ und $n = 0.8$ zu suchen war.

Die zuletzt angeführten Werte von n wurden nun der weiteren Rechnung zugrunde gelegt. Bevor auf diese eingegangen wird, ist noch zu erwähnen, daß für gewisse Werte von n infolge der geschilderten Reduktion auf gleiches Gewicht einzelne der Koeffizienten von Y und Z recht geringe Beträge annahmen. Um dem zu begegnen, schien es für die folgende Rechnung angebracht, den Gleichungen der Nachwirkung noch etwas andere Gestalt zu geben. Zu diesem Zwecke wurden statt Y und Z die Unbekannten U und V eingeführt vermittels der Beziehungen

$$34\,U = 2(1-n)\,Y \qquad 34\,V = (1-n)^2 Z,$$

wobei der linksstehende Zahlenfaktor 34 als Mittel aus den oben angeführten Gewichtsdivisoren angesetzt wurden. Alsdann ergaben sich die Gleichungen in folgender Form:

$$\begin{aligned}
(12) &= 34\,U + 34\,V \\
(23) &= 34\,U + 34\,n^2 V \\
(34) &= 34\,U + 34\,n^4 V \\
(45) &= 34\,U + 34\,n^6 V \\
(56) &= 34\,U + 34\,n^8 V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(13) &= 34\,(1+n)\,U + 34\,(1+n)^2 V \\
(24) &= 34\,(1+n)\,U + 34\,n^2(1+n)^2 V \\
(35) &= 34\,(1+n)\,U + 34\,n^4(1+n)^2 V \\
(46) &= 34\,(1+n)\,U + 34\,n^6(1+n)^2 V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(14) &= 34\,(1+n+n^2)\,U + 34\,(1+n+n^2)^2 V \\
(25) &= 34\,(1+n+n^2)\,U + 34\,n^2(1+n+n^2)^2 V \\
(36) &= 34\,(1+n+n^2)\,U + 34\,n^4(1+n+n^2)^2 V
\end{aligned}$$

$$(15) = 34\,(1+n+n^2+n^3)\,U + 34\,(1+n+n^2+n^3)^2\,V$$
$$(20) = 34\,(1+n+n^2+n^3)\,U + 34\,n^2\,(1+n+n^2+n^3)^2\,V$$
$$(16) = 34\,(1+n+n^2+n^3+n^4)\,U + 34\,(1+n+n^2+n^3+n^4)^2\,V.$$

Von dieser Form der Gleichungen ausgehend wurde zur Elimination von U und V, um deren Berechnung es sich ja noch nicht handelte, ein genaueres Verfahren, die Methode der kleinsten Quadrate, ausgewandt, und dabei wurde die weitere Rechnung auch auf Gruppe I und II ausgedehnt. Bezüglich der anzunehmenden Werte für n war die oben ausgeführte Bestimmung des das Minimum der Widersprüche einschließenden Interwalls maßgebend. Es waren also für den Modul n Werte zwischen $n = 0.5$ und $n = 0.8$ anzunehmen. Dabei wurden nun die einzelnen Beträge in gleichen Abständen voneinander gewählt, sodaß die Reihe der n von fünf zu fünf Hunderteln fortschritt. Nachdem für die so angenommenen n die Koeffizienten der Unbekannten U und V in den Gleichungen der Nachwirkung angesetzt und reduziert waren, wurden für die einzelnen n die Unbekannten U und V nach der Methode der kleinsten Quadrate eliminiert und die übrigbleibenden Widersprüche nebst deren zugehörigen Quadratsummen ermittelt. Damit erhielt man zu der Reihe der n entsprechend die Reihe der Quadratsummen, was, wenn man die letzteren als eine Funktion von n auffaßt, bedeutete, daß diese Funktion von n für ein kleines Interwall tabuliert worden war. Dabei war nun dieses Interwall bereits so gewählt, daß innerhalb desselben das Minimum der Funktion lag, und die weitere Aufgabe war nun, den dem Minimum entsprechenden Wert des Arguments n genau zu bestimmen, wobei für n keine größere Genauigkeit als bis auf die zweite Dezimale gefordert wurde.

Bei der Lösung dieser Aufgabe hätte man nun in der Weise verfahren können, daß man bei der Tabulierung der Quadratsummen der Widersprüche das Tafelintervall noch enger genommen, also in die Reihe der n noch mehr Zwischenpunkte eingeschaltet hätte. Um indessen den mit diesem Verfahren verbundenen beträchtlichen Rechenaufwand zu umgehen, wurde der an nachstehendem Beispiel erläuterte Weg eingeschlagen.

Bei Behandlung der Reihe L_{III} ergaben sich für die Werte $n = 0.50$, 0.55, 0.60, 0.65 folgende Quadratsummen der Widersprüche:

$n = 0.50$	0.0917
$n = 0.55$	0.0789
$n = 0.60$	0.0726
$n = 0.65$	0.0917.

Diese Zahlen ließen erkennen, daß das Minimum zwischen den zu $n = 0.55$ und $n = 0.60$ gehörigen Summen zu suchen war. Um dasselbe genauer zu bestimmen, wurde von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß dem Minimum einer Funktion das Nullwerden des zugehörigen Differentialquotienten entspricht. Es war nun zunächst erforderlich, zur Reihe der Quadratsummen die Reihe der zugehörigen Differentialquotienten zu ermitteln. Da nun bereits erkannt wurde, daß das Minimum zwischen den beiden mittleren Summen gelegen war, so waren lediglich die zu den Werten $n = 0.55$ und $n = 0.60$ gehörigen Differentialquotienten zu berechnen, da außerhalb dieses Intervalls der Verlauf der Ableitung nicht interessierte. Innerhalb dieses kritischen Intervalls mußte nun der Differentialquotient, der ja ebenfalls als eine Funktion von n aufgefaßt werden kann, einmal an der dem Minimum entsprechenden Stelle durch Null gehen und daher zu beiden Seiten dieser Stelle mit verschiedenem Vorzeichen auftreten. Bei der Kleinheit dieses Intervalls war es nun ohne merklichen Fehler angängig, den Verlauf des Differentialquotienten innerhalb desselben als geradlinig anzusehen, d. h. also die Änderungen des Differentialquotienten den zugehörigen Änderungen von n proportional zu setzen. Auf Grund dieser Annahme wurde dann durch eine geradlinige Interpolation aus den beiden für $n = 0.55$ und $n = 0.60$ berechneten Ableitungen der zum Minimum gehörige Wert von n bestimmt.

Für den in dieser Weise berechneten Betrag von n hatten also die zugehörigen Widersprüche ein Minimum, und deswegen war dieses n als der geltende Wert des Nachwirkungsmodul anzusehen. Die soeben geschilderte Rechnung wurde nun für alle reinen Lagen durchgeführt, und es ergaben sich hierbei folgende Resultate:

L_{I}	$n = 0.51$	H_{I}	$n = 0.55$
L_{II}	$n = 0.60$	H_{II}	$n = 0.56$
L_{III}	$n = 0.59$	H_{III}	$n = 0.56$
E_{I}	$n = 0.84$	Z_{I}	$n = 0.60$
E_{II}	$n = 0.70$	Z_{II}	$n = 0.60$
E_{III}	$n = 0.72$	Z_{III}	$n = 0.60.$

Wie diese Zahlen erkennen lassen, stimmen die für die Reihen $H_{\mathrm{I}} - H_{\mathrm{III}}$ und $Z_{\mathrm{I}} - Z_{\mathrm{III}}$ gefundenen Werte des Nachwirkungskoeffizienten recht gut überein, während bei den Reihen $L_{\mathrm{I}} - L_{\mathrm{III}}$ und $E_{\mathrm{I}} - E_{\mathrm{III}}$ eine nicht unbeträchtliche Verschiedenheit herrscht. Der Grund hierfür wurde in einem außergewöhnlich gangstörenden Einflusse der Reise gesucht, die die meisten Uhren vor Beginn der Beobachtung zurückzulegen haben. Bei der Zerlegung des zu den Reihen L und E gehörigen Zählkartenmaterials in die Gruppen I und II war zunächst keine Rücksicht auf die Lage der einzelnen Uhr in der Vorwoche genommen. Da nun, wie aus den gefundenen Resultaten hervorzugehen scheint, der Einfluß der Reise stärker ist, als von vornherein angenommen wurde, so konnte innerhalb der Gruppen I und II eine Mischung von Verteilungen vorliegen, der dann der beobachtete Unterschied zuzuschreiben war. Deswegen wurde, wie bereits Seite 16 erwähnt ist, eine Umordnung des hierher gehörigen Zählkartenmaterials in die Gruppen IV und V vorgenommen. Die hierauf mit den Reihen $L_{\mathrm{IV,V}}$ und $E_{\mathrm{IV,V}}$ angestellte Rechnung bestätigte indessen die zuletzt ausgesprochene Vermutung nicht, indem für n folgende die gleiche Verschiedenheit aufweisende Werte gefunden wurden:

L_{IV}	$n = 0.50$	E_{IV}	$n = 0.69$
L_{V}	$n = 0.69$	E_{V}	$n = 0.74.$

Nun kann die Verschiedenheit innerhalb der einzelnen Gruppen der Lagen L und E immerhin doch auf dem Einflusse der Reise beruhen, wenn man annimmt, daß derselbe sich länger denn eine volle Woche geltend macht und daher eine längere Zeit vergeht, ehe im Gange der Uhr das normale Gleichgewicht eingetreten ist. Die gefundenen Resultate sprechen für diese Annahme, da bei den Lagen H und Z, die in die dritte oder vierte Vergleichswoche fallen, in der der Einfluß der Reise sicher nicht mehr wirkt, die bei den Lagen E und Z festgestellte Verschiedenheit innerhalb der einzelnen Gruppen nicht mehr zu bemerken ist. Eine bestimmte Entscheidung hierüber läßt sich indessen nicht treffen, zumal da schließlich als weiterer Grund für die beobachtete Verschiedenheit auch der immerhin noch geringe Umfang der hier behandelten Kollektivreihen anzuführen ist, sodaß der Unterschied zwischen den einzelnen Gruppen unausgeglichenen Zufälligkeiten zur Last gelegt werden kann.

Als Resultat der vorstehenden Untersuchung ist somit anzuführen, daß bei dem vorliegenden Uhrenmaterial der Betrag des Nachwirkungskoeffizienten für die reinen Lagen innerhalb der Grenzen 0.50 und 0.85 schwankt.

§ 24. Mit den oben angeführten endgültigen Werten für n wurden nunmehr nach der Methode der kleinsten Quadrate die zu den einzelnen n gehörigen Unbekannten U, V aus den Gleichungen für die Nachwirkung ermittelt und nach Einsetzung der gefundenen Werte in die Gleichungen die übrigbleibenden Widersprüche sowie deren Quadratsumme Σw^2 ermittelt. Außerdem wurde noch die als mittlerer Widerspruch einer Gleichung bezeichnete Größe

$$M = \sqrt{\Sigma w^2} : \sqrt{(15 - 3)}$$

bestimmt, wobei 15 die Anzahl der benutzten Gleichungen und 3 die Anzahl der aus ihnen bestimmten Unbekannten ist. Bei der Beurteilung der einzelnen Größen M wurde noch der theoretische Fehler der zugehörigen Kollektivreihen herangezogen. Zu diesem Zwecke wurde die von Bruns (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre § 127 [23]) angegebene Formel für den gegenwärtigen Fall zurechtgelegt; dieselbe lautet, wenn man a. a. O. $N = 1$ setzt und, wie es bei den behandelten Reihen angängig ist, für die Koeffizienten D_4 verschwindende Beträge annimmt,

$$str(S^2) : s^2 = \sqrt{2} : \sqrt{m}.$$

Hierin bedeutet S den beobachteten Wert der Streuung und s deren Sollwert, wie er einem unendlich großen Umfange der betreffenden Kollektivreihe entspräche, deren beobachteter Umfang m ist. Nun ist der Sollwert s nicht bekannt, kann aber bei genügendem Umfange der betr. Reihe ohne merklichen Fehler durch den beobachteten Wert S ersetzt werden. Dann gibt die vorstehende Formel genähert die Streuung oder mittlere Abweichung des beobachteten Streuungsquadrates ausgedrückt in Einheiten des beobachteten Streuungsquadrates. Für das folgende soll nun der Ausdruck

$$F = \sqrt{2} : \sqrt{m}$$

kurz als der mittlere Fehler des beobachteten Streuungsquadrates bezeichnet werden.

Zu jedem mittleren Widerspruch M ergibt sich somit aus der zugehörigen Kollektivreihe ein mittlerer Fehler F, und es zeigt sich nun (vgl. Tabelle XXIV), daß die zusammengehörigen Werte M und F nahezu übereinstimmen. Der mittlere Widerspruch einer Gleichung ist also nicht größer als der mittlere Fehler des zugehörigen beobachteten Streuungsquadrates (ik). Was dabei nun die Beträge der einzelnen Widersprüche anbelangt, so liegen dieselben durchgängig innerhalb des dreifachen Wertes von M, den man gewöhnlich als äußerste zulässige Grenze hinstellt. Daraus ergibt sich, daß die Gleichungen für die Nachwirkung durch die gefundenen Werte von n, U, V hinlänglich befriedigt werden. Damit erweist sich aber der gemachte Gleichungsansatz mit den beiden Hypothesen, auf denen er beruhte, als durchaus annehmbar.

Die gefundenen Werte für U und V dienten nun noch zur Berechnung der ursprünglichen Unbekannten X und G, aus denen dann die Werte für $str(x_i)$ und $str(g_1)$ bestimmt wurden. In Tabelle XXIV sind die einzelnen Größen U, V, M, F, X, G, $str(x_1)$ und $str(g_1)$ zusammengestellt, wobei auch nochmals die gefundenen Werte von n sowie die Umfänge m

der einzelnen Kollektivreihen angeführt sind. Als Einheit für $str(x_i)$ und $str(g_1)$ ist hier die Sekunde genommen. Besonders bemerkenswert ist noch, daß die Beträge für $str(x_i)$ gegenüber denen von $str(g_1)$ merklich kleiner sind.

Anwendung.

§ 24. Die bisher gefundenen Resultate sollen im folgenden noch zu einer Berechnung und Untersuchung der mittleren Gangausschläge, wie sie sich auf Grund des Gesetzes der konstanten Nachwirkung ergeben, angewandt werden. Zu diesem Zwecke gehen wir von den Seite 35 angesetzten Gleichungen für die konstante Nachwirkung der aufeinanderfolgenden Gangausschläge aus. Durch successives Aufsummieren dieser Gleichungen und Dividieren mit der Zahl der summierten Gleichungen ergeben sich für die Mittel der Gangausschläge folgende Relationen:

$$(g_1 + g_2)/2 = [g_1 (1 + n) + x_1]/2$$
$$(g_1 + g_2 + g_3)/3 = [g_1(1 + n + n^2) + (1 + n)x_1 + x_2]/3 \quad \text{usw.}$$

Rechnet man g_1 mit zu diesen Mitteln, so erhält man sonach sechs mittlere Gangausschläge, die der Reihe nach mit $g(1)$, $g(2) \dots g(6)$ bezeichnet werden sollen. Für die Streuungsquadrate dieser Größen folgen dann nach dem obigen die nachstehenden Gleichungen:

$$str[g(1)]^2 = G$$
$$str[g(2)]^2 = [G(1 + n)^2 + X]/4$$
$$str[g(3)]^2 = [G(1 + n + n^2)^2 + (1 + n)^2 X + X]/9, \quad \text{usw.}$$

Dabei kann nun, wie ersichtlich, die rechte Seite jeder Gleichung in zwei Bestandteile zerlegt werden, nämlich einen durch die Nachwirkung von g hervorgerufenen Teil I und einen von den unregelmäßigen Faktoren (x_i) herrührenden Teil II. Um zu erkennen, mit welchen Beträgen G und X in die einzelnen Gleichungen eingehen, wurden die zugehörigen Koeffizienten berechnet. In Tabelle XXV sind dieselben für die Reihen

L_{III}, H_{III}, E_{III}, Z_{III} zusammengestellt. An dem Verlaufe dieser Zahlen ist deutlich zu erkennen, wie die Nachwirkung von g_1 nach und nach abklingt, während die unregelmäßigen Bestandteile x_i mehr und mehr wachsende Beiträge liefern.

Da die Teile I und II zusammen das Streuungsquadrat des betreffenden mittleren Gangausschlages liefern, so interessiert besonders die Frage, in welchem Verhältnisse diese beiden Teile stehen. Hierüber gibt Tabelle XXVI Aufschluß, wo die Teile I und II sowie der Quotient I/II und ferner die Streuungsquadrate und Streuungen — bei letzteren gilt die Sekunde als Einheit — der mittleren Gangausschläge aufgeführt sind. Die gefundenen Zahlen lassen erkennen, wie mit der Zeit die von den unregelmäßigen Gliedern herrührenden Beiträge den von G abhängigen, beständig abnehmenden Teil überwiegen. Um dies deutlicher vor Augen zu führen, wurde der Quotient I/II gebildet. Dieser gibt dabei gleichzeitig ein gewisses Maß für die Sicherheit, die dem zugehörigen berechneten mittleren Gangausschlag beizulegen ist, denn dieselbe wird um so geringer, je kleiner der von G abhängige Teil I gegenüber dem durch die unregelmäßigen Glieder hervorgerufenen Teil II ist. Da die kleinsten Werte dieses Quotienten nicht viel kleiner als Eins sind, so ist damit gesagt, daß selbst nach Ablauf der zu einer reinen Lage gehörigen Beobachtungsdauer, d. i. nach sechs Tagen der Teil II den Teil I nicht wesentlich überwiegt. Der von der Nachwirkung des Gangausschlages g_1 herrührende Bestandteil in $g(6)$ ist also gegenüber dem von den unregelmäßigen Gliedern herrührenden Beitrage bei weitem nicht als unwesentlich anzusehen. Daraus ist zu schließen, daß es jedenfalls einer längeren Frist bedarf, ehe die Teile II den Teil I beträglich überwiegen, sodaß dann der nachwirkende Einfluß von g_1 als unmerklich und eliminiert anzusehen wäre.

Bei der Beurteilung der Leistung einer Uhr kommt es aber gerade darauf an, zu wissen, wie stark die lediglich von den unregelmäßigen Faktoren hervorgerufenen Gangstörungen sind. Daraus fließt für die Technik der Uhrenprüfung die Folgerung, die einzelnen Beobachtungsperioden einer Lage möglichst lang auszudehnen.

§ 25. Hiermit erreichen die von mir angestellten Untersuchungen ihren Abschluß. Als Hauptergebnis derselben ist anzuführen, daß sich die Hypothese einer konstanten Nachwirkung der reinen Uhrgänge als richtig erwiesen hat, und daß der Wert des Nachwirkungskoeffizienten bei dem vorliegenden Material innerhalb der Grenzen 0.50 und 0.85 gelegen ist. Eine Diskussion des Abhängigkeitsverhältnisses der Zwischenvariationen wurde von mir noch zurückgestellt. Das hierfür von mir bereits vorbereitete Zahlenmaterial liegt, soweit es nicht schon in der vorliegenden Arbeit mitgeteilt ist, zu einer späteren Bearbeitung im Archive der Leipziger Sternwarte aufbewahrt.

Anhang (Tabellen).

Tabelle I.
Verteilung der benutzten Gangregister nach Jahren und Fabrikanten.

Jahr	J. Assmann	A. Lange & Söhne	Σ
1898	6	58	64
1899	9	60	69
1900	11	57	68
1901	4	62	66
1902	4	44	48
1903	19	46	65
1904	8	29	37
1905	11	40	51
1906	3	21	24
1907	9	9	18
1908	5	9	14
Σ	89	435	524

Tabelle II.
Verteilungstafel der reinen Variation *Ed*.

Argument	*Ed*	Argument	*Ed*	Argument	*Ed*
979	1	992	9	5	22
80	—	93	7	6	11
81	—	94	18	7	14
82	—	95	21	8	7
83	—	96	26	9	5
84	—	97	38	10	4
85	1	98	55	11	1
86	—	99	52	12	1
87	—	000	48	13	—
88	2	1	47	14	—
89	1	2	48	15	—
90	5	3	32	16	1
91	5	4	28		

Tabelle III.

Die Toleranzen. (Einheit: Zehntelsekunde.)

Argument	Toleranz	Argument	Toleranz	Argument	Toleranz
$La - Le$	± 14	HTw	± 53	THv	± 15
Lf	23	$Ea - Ee$	14	THw	55
LTs	14	Ef	28	$A = L - H$	33
LTt	45	$Za - Ze$	14	$B = H - E$	33
LTu	34	Zf	28	$C = E - Z$	21
LTv	14	TLs	14	$D = L - Z$	27
LTw	46	TLt	49	$P = L - E$	27
$Ha - He$	15	TLu	33	$Q = H - Z$	33
Hf	26	TLv	14		
HTs	15	TLw	43	J	27.9
HTt	56	THs	14	R	21.9
HTu	34	THt	53	S	35.0
HTv	14	THu	39	K	45.9

Tabelle IV.

Reihen $L_{\text{I, II, III}}$: $m^2[x, y]$.

$m_{\text{I}} = 253$ $m_{\text{II}} = 251$ $m_{\text{III}} = 504$.

Argument	$m^2[x,y]$	Argument	$m^2[x,y]$
$[a, b]$ I	$-$ 475811	$[b, d]$ I	$-$ 106405
II	$-$ 158445	II	$+$ 43816
III	$-$ 1270188	III	$-$ 128399
$[b, c]$ I	$-$ 173761	$[c, e]$ I	$-$ 45468
II	$-$ 199317	II	$-$ 76417
III	$-$ 756978	III	$-$ 262854
$[c, d]$ I	$-$ 135207	$[a, d]$ I	$+$ 53818
II	$-$ 231383	II	$+$ 6951
III	$-$ 727806	III	$+$ 123588
$[d, e]$ I	$-$ 281140	$[b, e]$ I	$-$ 25309
II	$-$ 331921	II	$+$ 40257
III	$-$ 1234377	III	$+$ 43929
$[a, c]$ I	$+$ 113447	$[a, e]$ I	$-$ 69548
II	$+$ 36335	II	$+$ 10926
III	$+$ 304776	III	$-$ 124020

Tabelle V.

Reihen $L_{\mathrm{IV, V}}$: $m^2[x, y]$.

$m_{\mathrm{IV}} = 277 \qquad m_{\mathrm{V}} = 217.$

Argument	$m^2[x, y]$	Argument	$m^2[x, y]$
$[a, b]$ IV	− 393613	$[b, d]$ IV	+ 18015
V	− 247008	V	− 45392
$[b, c]$ IV	− 245739	$[c, e]$ IV	− 2215
V	− 143976	V	− 59178
$[c, d]$ IV	− 245152	$[a, d]$ IV	+ 3574
V	− 158648	V	+ 18197
$[d, e]$ IV	− 366679	$[b, e]$ IV	− 20262
V	− 187291	V	+ 49345
$[a, c]$ IV	+ 70743	$[a, e]$ IV	+ 25290
V	+ 103075	V	− 99913

Tabelle VI.

Reihen $H_{\mathrm{I, II, III}}$: $m^2[x, y]$.

$m_{\mathrm{I}} = 241 \qquad m_{\mathrm{II}} = 247 \qquad m_{\mathrm{III}} = 488.$

Argument	$m^2[x, y]$	Argument	$m^2[x, y]$
$[a, b]$ I	− 173562	$[b, d]$ I	+ 14174
II	− 233659	II	+ 20283
III	− 812424	III	+ 67488
$[b, c]$ I	− 251281	$[c, e]$ I	+ 41086
II	− 239528	II	− 56952
III	− 985118	III	− 40503
$[c, d]$ I	− 270143	$[a, d]$ I	− 22481
II	− 255427	II	− 226353
III	− 1044388	III	− 494304
$[d, e]$ I	− 248711	$[b, e]$ I	− 32102
II	− 232844	II	− 134720
III	− 968340	III	− 329194
$[a, c]$ I	− 23312	$[a, e]$ I	− 105300
II	− 26679	II	− 33567
III	− 103664	III	− 277120

Tabelle VII.

Reihen $E_{\text{I, II, III}}$: $m^2[x,y]$.

$m_{\text{I}} = 244$ $m_{\text{II}} = 250$ $m_{\text{III}} = 494$.

Argument	$m^2[x,y]$	Argument	$m^2[x,y]$
$[a, b]$ I	— 160212	$[b, d]$ I	— 40528
II	— 62770	II	— 69820
III	— 439956	III	— 216818
$[b, c]$ I	— 221228	$[c, e]$ I	— 72102
II	— 124840	II	— 114777
III	— 709218	III	— 378942
$[c, d]$ I	— 164062	$[a, d]$ I	— 58014
II	— 211203	II	+ 81541
III	— 751208	III	+ 44658
$[d, e]$ I	— 69845	$[b, e]$ I	+ 32940
II	— 138921	II	— 81880
III	— 414568	III	— 83588
$[a, c]$ I	+ 20140	$[a, e]$ I	+ 71370
II	— 96283	II	— 101231
III	— 153999	III	— 51982

Tabelle VIII.

Reihen $E_{\text{IV, V}}$: $m^2[x,y]$.

$m_{\text{IV}} = 211$ $m_{\text{V}} = 283$.

Argument	$m^2[x,y]$	Argument	$m^2[x,y]$
$[a, b]$ IV	— 93618	$[b, d]$ IV	— 11849
V	— 125573	V	— 106624
$[b, c]$ IV	— 135710	$[c, e]$ IV	— 34845
V	— 223890	V	— 168330
$[c, d]$ IV	— 69825	$[a, d]$ IV	— 41299
V	— 337461	V	+ 79178
$[d, e]$ IV	— 68693	$[b, e]$ IV	+ 16388
V	— 148927	V	— 68074
$[a, c]$ IV	+ 22967	$[a, e]$ IV	+ 10153
V	— 119434	V	— 45298

Tabelle IX.

Reihen $Z_{\mathrm{I,\,II,\,III}}$: $m^2[x,y]$.

$m_{\mathrm{I}} = 246$ $m_{\mathrm{II}} = 252$ $m_{\mathrm{III}} = 498$.

Argument	$m^2[x,y]$	Argument	$m^2[x,y]$
$[a,b]$ I	— 175882	$[b,d]$ I	— 165938
II	— 248292	II	— 49890
III	— 830758	III	— 405472
$[b,c]$ I	— 154742	$[c,e]$ I	— 82532
II	— 111024	II	— 50136
III	— 547337	III	— 255760
$[c,d]$ I	— 159106	$[a,d]$ I	+ 83094
II	— 285240	II	+ 64356
III	— 894728	III	+ 305126
$[d,e]$ I	— 226334	$[b,e]$ I	— 18202
II	— 192560	II	— 105396
III	— 859298	III	— 278876
$[a,c]$ I	— 72074	$[a,e]$ I	— 4798
II	— 27000	II	+ 5340
III	— 204182	III	— 10472

Tabelle X.

Reihen $LT_{\mathrm{I,\,II,\,III}}$: $m^2[x,y]$.

$m_{\mathrm{I}} = 219$ $m_{\mathrm{II}} = 224$ $m_{\mathrm{III}} = 443$.

Argument	$m^2[x,y]$	Argument	$m^2[x,y]$
$[s,t]$ I	— 162051	$[s,u]$ I	+ 38539
II	— 383668	II	+ 684
III	— 1072308	III	+ 124967
$[t,u]$ I	— 1598322	$[t,v]$ I	+ 192972
II	— 2138569	II	+ 110628
III	— 7443827	III	+ 609900
$[u,v]$ I	— 518221	$[s,v]$ I	+ 9511
II	— 531132	II	— 148624
III	— 2096238	III	— 272828

Tabelle XI.

Reihe HT_{III}: $m^2[x, y]$.

$m_{\text{III}} = 258$.

Argument	$m^2[x, y]$
$[s, t]$ III	— 727167
$[t, u]$ III	— 3136929
$[u, v]$ III	— 328906
$[s, u]$ III	+ 187817
$[t, v]$ III	— 485778
$[s, v]$ III	+ 36170

Tabelle XII.

Reihe TL_{III}: $m^2[x, y]$.

$m_{\text{III}} = 285$.

Argument	$m^2[x, y]$
$[s, t]$ III	— 530079
$[t, u]$ III	— 4391976
$[u, v]$ III	— 292968
$[s, u]$ III	— 110526
$[t, v]$ III	— 453747
$[s, v]$ III	— 119607

Tabelle XIII.

Reihen $TH_{\text{I, II, III}}$: $m^2[x, y]$.

$m_{\text{I}} = 221$ $m_{\text{II}} = 223$ $m_{\text{III}} = 444$.

Argument	$m^2[x, y]$	Argument	$m^2[x, y]$
$[s, t]$ I	— 228276	$[s, u]$ I	— 44827
II	— 115101	II	— 160858
III	— 652329	III	— 408015
$[t, u]$ I	— 1625506	$[t, v]$ I	+ 79730
II	— 3170487	II	— 104656
III	— 9573263	III	— 78947
$[u, v]$ I	— 536293	$[s, v]$ I	— 13835
II	— 505414	II	+ 47020
III	— 2085745	III	+ 51561

Tabelle XIV.

Argumentdurchnitt und Streuung für Reihen $L_{\text{I-V}}$.

x	I		II		III		IV		V	
	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$
a	−0.17	4.53	+0.02	3.87	−0.07	4.22	−0.17	4.37	+0.29	3.72
b	+0.06	4.13	−0.29	3.78	−0.12	3.96	−0.09	3.92	−0.16	3.80
c	−0.44	3.48	+0.04	3.95	−0.20	3.73	−0.34	3.57	−0.16	3.75
d	−0.32	3.76	−0.12	3.70	−0.22	3.73	−0.42	3.46	+0.08	3.84
e	+0.36	3.90	−0.26	3.75	+0.05	3.84	+0.20	3.79	−0.11	3.71

Tabelle XV.

Argumentdurchschnitt und Streuung für Reihen $H_{\text{I-III}}$.

x	I		II		III	
	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$
a	−0.14	4.55	−0.02	4.66	−0.09	4.61
b	−0.59	4.14	−0.49	4.01	−0.55	4.08
c	+0.04	3.86	−0.50	4.07	−0.24	3.98
d	−0.01	4.20	−0.24	4.41	−0.12	4.31
e	−0.49	4.19	−0.15	4.18	−0.32	4.18

Tabelle XVI.

Argumentdurchschnitt und Streuung für Reihen $E_{\text{I-V}}$.

x	I		II		III		IV		V	
	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$
a	−0.22	3,91	−0.43	3.97	−0.32	3.94	−0.42	4.27	−0.25	3.68
b	+0.23	3,71	−0.44	3.95	−0.11	3.85	−0.02	3.75	−0.18	3.92
c	−0.43	3,78	−0.07	3.90	−0.25	3.85	−0.29	3.64	−0.22	3.99
d	−0.07	3,89	−0.15	4.07	−0.11	3.98	−0.29	3.74	+0.03	4.15
e	−0.25	3,92	−0.53	3.93	−0.39	3.93	−0.58	3.76	−0.25	4.05

Tabelle XVII.

Argumentdurchschnitt und Streuung für Reihen $Z_{\text{I-III}}$.

x	I		II		III	
	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$
a	−0.68	4.47	−0.38	4.53	−0.52	4.50
b	−0.65	4.33	+0.22	4.19	−0.21	4.28
c	+0.18	4.11	−0.09	4.20	+0.04	4.16
d	+0.45	3.96	+0.09	4.18	−0.18	4.08
e	−0.08	4.09	−0.54	3.51	−0.23	3.82

Tabelle XVIII.
Argumentdurchschnitt und Streuung für Reihen $LT_{\mathrm{I-III}}$.

x	I		II		III	
	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$
s	+ 0.54	3.78	— 0.30	3.89	+ 0.11	3.86
t	+ 0.47	11.96	+ 0.12	12.63	+ 0.29	12.31
u	+ 1.29	9.06	+ 0.19	9.52	+ 0.74	9.31
v	— 0.58	4.50	— 0.62	4.76	— 0.60	4.63

Tabelle XIX.
Argumentdurchschnitt und Streuung für Reihe HT_{III}.

x	III		x	III	
	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$		$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$
s	— 0.30	4.34	u	+ 0.67	9.13
t	+ 1.64	14.47	v	— 0.50	4.33

Tabelle XX.
Argumentdurchschnitt und Streuung für Reihen $TH_{\mathrm{I-III}}$.

x	I		II		III	
	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$
s	— 0.09	4.15	— 0.68	3.83	— 0.38	4.01
t	+ 0.39	14.76	— 0.86	14.16	— 0.24	14.48
u	— 0.42	9.86	— 0.50	10.83	— 0.46	10.36
v	— 0.36	4.80	+ 0.14	4.63	— 0.11	4.72

Tabelle XXI.
Argumentdurchschnitt und Streuung für Reihe TL_{III}.

x	III		x	III	
	$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$		$\mathfrak{D}(x)$	$str(x)$
s	— 0.26	4.25	u	+ 0.54	9.30
t	+ 0.04	13.29	v	— 0.24	4.53

Tabelle XXII. Reihe L_{III}: $str(z)^2$.

z	$str(z)^2$	z	$str(z)^2$	z	$str(z)^2$
a	17.78	$a+b$	23.49	$b+c+d$	30.86
b	15.71	$b+c$	23.67	$c+d+e$	25.07
c	13.92	$c+d$	22.13	$a+b+c+d$	42.02
d	13.94	$d+e$	18.95	$b+c+d+e$	34.15
e	14.73	$a+b+c$	33.85	$a+b+c+d+e$	44.33

Tabelle XXIII.

Die reduzierten Streuungsquadrate.

	L_{I}	L_{II}	L_{III}	L_{IV}	L_{V}	H_{I}	H_{II}	H_{III}	E_{I}	E_{II}	E_{III}	E_{IV}	E_{V}	Z_{I}	Z_{II}	Z_{III}
(12)	1.21	0.88	1.05	1.13	0.81	1.22	1.28	1.25	0.90	0.93	0.91	1.07	0.79	1.18	1.21	1.19
(23)	1.00	0.84	0.92	0.90	0.85	1.01	0.95	0.98	0.81	0.92	0.87	0.83	0.90	1.10	1.03	1.08
(34)	0.71	0.92	0.82	0.75	0.83	0.88	0.98	0.93	0.84	0.90	0.87	0.78	0.94	1.00	1.04	1.02
(45)	0.83	0.81	0.82	0.70	0.87	1.04	1.14	1.09	0.89	0.97	0.93	0.82	1.01	0.92	1.03	0.98
(56)	0.89	0.83	0.87	0.84	0.81	1.03	1.03	1.03	0.91	0.91	0.91	0.83	0.96	0.98	0.73	0.86
(13)	0.87	0.93	0.90	0.93	0.68	1.23	1.16	1.19	0.91	1.13	1.03	1.08	0.99	1.27	1.16	1.23
(24)	0.91	0.91	0.91	0.83	0.86	0.90	0.95	0.93	0.79	1.03	0.91	0.82	0.99	1.17	1.22	1.20
(35)	0.85	0.84	0.85	0.70	0.85	0.90	1.06	0.99	0.92	0.96	0.94	0.93	0.95	1.05	1.00	1.03
(46)	0.79	0.66	0.73	0.65	0.79	1.02	1.12	1.08	1.08	1.06	1.07	0.96	1.15	0.96	0.91	0.94
(14)	0.97	1.02	1.00	0.95	0.88	1.10	1.12	1.11	0.92	1.10	1.01	1.07	0.97	1.25	1.28	1.27
(25)	0.89	0.92	0.91	0.82	0.84	0.95	1.07	1.02	0.85	1.01	0.93	0.93	0.93	1.04	1.13	1.10
(36)	0.79	0.68	0.74	0.68	0.75	0.99	1.05	1.02	1.02	0.95	0.98	0.99	0.98	1.00	0.91	0.95
(15)	0.98	1.02	1.00	0.92	0.88	1.08	1.01	1.05	0.89	1.13	1.02	1.06	0.98	1.19	1.25	1.23
(26)	0.82	0.80	0.81	0.76	0.81	0.99	0.95	0.97	0.97	0.93	0.95	0.99	0.92	0.99	0.95	0,97
(16)	0.86	0.91	0.89	0.87	0.76	1.02	0.89	0.96	1.03	0.98	1.01	1.11	0.93	1.12	1.08	1.10

Tabelle XXIV.

Reihe	m	n	U	V	$M=\sqrt{\Sigma w^2}/\sqrt{12}$	$F=\sqrt{2}/\sqrt{m}$	X	G	$str(xi)$	$str(g_1)$
L_{I}	253	0.51	0.429	+0.086	±0.11	±0.09	11.012	27.061	0.33^s	0.52^s
L_{II}	251	0.60	0.385	+0.073	0.08	0.09	10.472	31.876	0.32^s	0.57^s
L_{III}	504	0.59	0.402	+0.067	0.08	0.06	10.866	30.219	0.33^s	0.55^s
L_{IV}	277	0.50	0.382	+0.113	0.09	0.08	9.741	28.356	0.31^s	0.53^s
L_{V}	217	0.69	0.390	+0.002	0.08	0.10	11.205	22.095	0.34^s	0.47^s
H_{I}	241	0.55	0.481	+0.086	0.09	0.09	12.674	32.611	0.36^s	0.57^s
H_{II}	247	0.56	0.521	+0.044	0.09	0.09	13.735	27.737	0.37^s	0.53^s
H_{III}	488	0.56	0.502	+0.062	0.08	0.06	13.231	30.164	0.36^s	0.55^s
E_{I}	244	0.84	0.421	−0.019	0.09	0.09	13.169	19.498	0.36^s	0.44^s
E_{II}	250	0.70	0.444	+0.029	0.05	0.09	12.832	36.117	0.36^s	0.60^s
E_{III}	494	0.72	0.433	+0.015	0.06	0.06	12.661	32.794	0.36^s	0.57^s
E_{IV}	211	0.69	0.402	+0.055	0.08	0.10	11.549	41.503	0.34^s	0.64^s
E_{V}	283	0.74	0.458	−0.012	0.07	0.08	13.548	23.911	0.37^s	0.49^s
Z_{I}	246	0.60	0.483	+0.089	0.04	0.09	13.138	39.441	0.36^s	0.63^s
Z_{II}	252	0.60	0.465	+0.100	0.10	0.09	12.648	41.013	0.36^s	0.64^s
Z_{III}	498	0.60	0.476	+0.095	0.06	0.06	12.947	40.248	0.36^s	0.63^s

Tabelle XXV.

	L_{III}		H_{III}	
	(G)	(X)	(G)	(X)
$g(1)$	1.000	0.000	1.000	0.000
$g(2)$	0.632	0.250	0.608	0.250
$g(3)$	0.418	0.392	0.388	0.382
$g(4)$	0.289	0.456	0.263	0.433
$g(5)$	0.206	0.477	0.185	0.445
$g(6)$	0.152	0.474	0.136	0.438

	E_{III}		Z_{III}	
	(G)	(X)	(G)	(X)
$g(1)$	1.000	0.000	1.000	0.000
$g(2)$	0.739	0.250	0.640	0.250
$g(3)$	0.558	0.439	0.427	0.396
$g(4)$	0.426	0.561	0.297	0.463
$g(5)$	0.332	0.631	0.213	0.486
$g(6)$	0.262	0.669	0.159	0.486

Tabelle XXVI.

z	L_{III}					z	H_{III}				
	I	II	I/II	$str(z)^2$	$str(z)$		I	II	I/II	$str(z)^2$	$str(z)$
$g(1)$	30.22	0.00	—	30.22	0.55^{s}	$g(1)$	30.16	0.00	—	30.16	0.55^{s}
$g(2)$	19.10	2.71	7.05	21.81	0.47^{s}	$g(2)$	18.35	3.31	5.54	21.66	0.47^{s}
$g(3)$	12.64	4.26	2.97	16.90	0.41^{s}	$g(3)$	11.72	5.05	2.23	16.77	0.41^{s}
$g(4)$	8.73	4.95	1.76	13.68	0.37^{s}	$g(4)$	7.92	5.73	2.12	13.65	0.37^{s}
$g(5)$	6.23	5.18	1.20	11.41	0.34^{s}	$g(5)$	5.58	5.89	0.95	11.47	0.34^{s}
$g(6)$	4.60	5.15	0.89	9.75	0.31^{s}	$g(6)$	4.09	5.79	0.71	9.88	0.31^{s}

z	E_{III}					z	Z_{III}				
	I	II	I/II	$str(z)^2$	$str(z)$		I	II	I/II	$str(z)^2$	$str(z)$
$g(1)$	32.79	0.00	—	32.79	0.57^{s}	$g(1)$	40.25	0.00	—	40.25	0.63
$g(2)$	24.25	3.17	7.65	27.42	0.52^{s}	$g(2)$	25.75	3.24	7.95	28.99	0.54
$g(3)$	18.28	5.57	3.29	23.85	0.49^{s}	$g(3)$	17.18	5.12	3.35	22.30	0.47
$g(4)$	13.96	7.10	1.97	21.06	0.46^{s}	$g(4)$	11.95	5.99	2.00	17.94	0.42
$g(5)$	10.88	8.00	1.35	18.88	0.43^{s}	$g(5)$	8.59	6.29	1.37	14.88	0.39
$g(6)$	8.59	8.47	1.01	17.06	0.41^{s}	$g(6)$	6.39	6.29	1.00	12.68	0.36