Der Einfluß der geographischen Breite und der Höhenlage eines Ortes auf die Zeitdauer der Pendelschwingungen

Bekanntlich ist die Erde keine Kugel, sondern ein Sphäroid von fast elliptischer Form. An den Polen ist sie abgeplattet, und der Durchmesser, von Pol zu Pol gemessen, ist 12 712 158 Meter, während der Durchmesser des Äquators 12 754 794 Meter beträgt. Je näher ein Körper dem Mittelpunkt der Erde ist, um so schwerer ist er, weil die Erdanziehung stärker auf ihn einwirkt. Aus dem gleichen Grunde fällt ein frei fallender Körper um so schneller, je näher er dem Erdmittelpunkte ist. Weil nun die Erdanziehung diejenige Naturkraft ist, durch welche die Pendelschwingungen hauptsächlich hervorgebracht werden, so ist es ohne weiteres verständlich, daß die mehr oder weniger stark wirkende Erdanziehung die Zeitdauer der Pendelschwingungen beeinflussen muß. Ein Pendel wird deshalb am Pol schneller schwingen als am Äquator; ebenso wird es am Meeresstrande aus dem gleichen Grunde seine Schwingungen rascher ausführen als auf hohem Berge.

Ein feines Pendel ist nun ein Instrument von solcher Präzision, daß man es aus den soeben angegebenen Gründen zum Messen von Gebirgshöhen tatsächlich verwendet; ja man hat sogar mit seiner Hilfe die genaue Form der Erde bestimmt, also den Betrag der Abplattung an den Erdpolen festgestellt.

c

Das Pendel in dieser Weise sozusagen als »Meßlatte« zu verwenden, fällt nun in die Tätigkeit der Astronomen und Geodäten. Sache des Uhrmachers aber ist es, für verschiedene Orte auf unserer Mutter Erde Pendeluhren zu liefern, die richtig gehen und richtige Zeit anzeigen. Für den Uhrmacher bildet demnach die Beeinflussung der Pendelschwingungen durch die Erdanziehung gewissermaßen eine Schattenseite dieses sonst so präzisen Instrumentes; denn wenn man z. B. im hoch gelegenen Schwarzwalde eine Pendeluhr fabriziert hat und verkauft sie nach einer niedriger gelegenen Stadt oder nach einer Gegend, die auf einem anderen Breitengrade liegt, so geht die Uhr nicht mehr richtig. Im allgemeinen ist die Sache zwar für den Uhrmacher nicht sehr gefährlich, denn das Pendel der Uhr braucht nur an Ort und Stelle ein wenig einreguliert zu werden. Bei feinen Präzisionsuhren jedoch wird meistens die notwendige Korrektion für den betreffenden Ort berechnet und schon vor dem Versand der Uhr direkt an der Reguliermutter des Pendels vorgenommen.

Denjenigen Uhrmachern oder Fabrikanten, die sich mit der Anfertigung solcher Präzisions-Pendeluhren befassen, will ich mit meiner nachstehenden kleinen Abhandlung nichts Neues bieten, dagegen einer großen Anzahl von Kollegen erklären, wie groß eigentlich die Beeinflussung der Pendelschwingungen durch die geographische Breite und Höhenlage eines Ortes ist, und wie sie berechnet werden kann. Hierbei wird es nicht ganz ohne einige mathematische Ausdrücke abgehen. Wer von den Lesern diesen nicht folgen kann oder mag, der überschlage sie und lese nachher die nicht minder interessanten Schlußfolgerungen, die an einem Beispiel deutlich die Differenz in der Zeitangabe zeigen, die eine Uhr unter der Beeinflussung der verschieden großen Erdanziehung an verschiedenen Orten der Erdoberfläche anzeigen muß.

Ferner lassen die Berechnungen erkennen, daß die Beeinflussung auf kurze und lange Pendel ganz gleichmäßig wirkt, so daß also ein Sekundenpendel genau soviel falsch geht wie irgend ein anderes — kürzeres oder längeres — Pendel. Weder in unserer Fachliteratur noch auf der Fachschule habe ich diese Tatsache erwähnt oder bestätigt gefunden, noch bin ich dort mit den Berechnungen bekannt geworden. Um so lieber nehme ich Veranlassung, hier eine kleine Lücke auszufüllen. Sollte ich mich irren (weil man unmöglich eine ganze große Fachliteratur im Kopfe haben kann), so ist es ja trotzdem keine Sünde, wenn solche Berechnungen in der Fachzeitung einem größeren Leserkreise bekannt werden. Aus dem soeben angeführten Grunde habe ich die zur Berechnung erforderliche Formel auch nicht einem Lehrbuche der Uhrmacherei entnehmen können, sondern mußte eine Anleihe machen im Ingenieur-Taschenbuch »Hütte«.

Die Erdanziehung ist diejenige Kraft, durch welche ein frei fallender Körper eine stetig beschleunigte Geschwindigkeit erhält, je länger der Fall dauert. Die Geschwindigkeit nun, die der fallende Körper am Ende der ersten Sekunde erreicht hat, wird in den physikalischen Rechnungen allgemein mit »g« bezeichnet und beträgt in mittlerer geographischer Breite 9,81 m. Dieser Wert wird zu sehr vielen in der Mechanik usw. erforderlichen Berechnungen gebraucht, im besonderen auch zu Pendelberechnungen. Der Wert von g ist veränderlich, je nach dem Breitengrade und der Höhenlage eines Ortes. Man ist aber in der Lage, für jeden Ort diesen Wert nach der folgenden (der »Hütte« entnommenen) Formel berechnen zu können:

$$g = 9{,}806056 - 0{,}025028 \cos 2\varphi - 0{,}000003\, h.$$

In dieser Formel ist der mit φ bezeichnete Winkel die geographische Breite des Ortes und h seine Höhe in Metern über der Nordsee. Am Äquator wäre also Winkel $\varphi = 0^0$, an den Polen dagegen $= 90^0$. Setzt man diese Werte nacheinander in die Formel ein, so erhält man die dem Äquator und den Polen entsprechenden Beschleunigungen:

g (Äquat.) $= 9{,}781$; g (Pol) $= 9{,}831$; g (mittl. Breite) $= 9{,}806$ m.

Der zuletzt angegebene Betrag ist derjenige Wert g der Erdbeschleunigung, den man in unserer gemäßigten Zone allgemein zu physikalischen Berechnungen, im besonderen auch für Pendelberechnungen anwendet.

Wenn man den Betrag der Erdbeschleunigung am Pol von dem am Äquator abzieht, so erhält man: $9{,}831 - 9{,}781 = 0{,}050$. Dividiert man diese Differenz durch den Wert g für mittlere Breite, also $0{,}050 : 9{,}806$, so findet man, daß es der 196. Teil ist. Dies deutet an, daß man um diesen Bruchteil falsch rechnet, wenn man mit der Erdbeschleunigung für mittlere Breitengrade ein Pendel berechnen wollte, welches entweder am Äquator oder am Pol richtige Zeit messen soll.

Durch eine schnelle Überschlagsrechnung kann man hiermit leicht feststellen, um wieviel ein für mittlere Breite richtiges Sekundenpendel für den Äquator zu lang und für die Pole zu kurz sein würde, nämlich $994 : 196 = 5{,}07$ mm.

Aus einer Tafel über Pendellängen, wie sie in manchen Uhrmacher-Kalendern enthalten sind, kann man ohne weiteres entnehmen, daß der Längenänderung von 5,07 mm bei einem Sekundenpendel eine tägliche Gangdifferenz von 3,7 Minuten entspricht. Dies ist eine ganz erhebliche Differenz, jedenfalls größer als mancher Leser sie sich gedacht hat. Allerdings ist dabei nicht zu vergessen, daß hierbei die extremen Fälle, also Äquator oder Pol, im Vergleich mit der mittleren Breite von 45 Grad angenommen wurden.

Man könnte nun versucht sein, anzunehmen, daß die Differenz bei einem kürzeren Pendel kleiner sein müßte. Eine flüchtige Überschlagsrechnung wird uns darüber gleich belehren:

Ein Halbsekundenpendel ist nur ein Viertel so lang als das Sekundenpendel, mithin 248,5 mm. Hiervon ist der 196. Teil $= 1{,}27$ mm, und die Pendellängen-Tabelle zeigt, daß einer solchen Längenänderung eine Gangdifferenz von ebenfalls 3,7 Minuten entspricht, also genau ebensoviel wie beim Sekundenpendel. Dies ist für den ersten Augenblick ein überraschendes Resultat. Man kann daraus entnehmen, daß der Einfluß der geographischen Breite auf die Zeitdauer der Pendelschwingungen für alle Pendel, ob kurze oder lange, ganz gleich groß ist. Nach einiger Überlegung muß man allerdings zu der Erkenntnis kommen, daß dieses Ergebnis ganz natürlich und eigentlich ebenso selbstverständlich ist wie die bekannte Tatsache, daß der Einfluß der verschiedenen Temperaturen bei den kurzen und langen Pendeln die gleichen Gangdifferenzen hervorbringt.

Bei der vorliegenden flüchtigen Berechnung ist nur die geographische Breite berücksichtigt worden, aber nicht die Höhenlage des Ortes. Ferner darf man auch nicht auf Grund einer annähernd richtigen Überschlagsberechnung das erhaltene Resultat als etwas Positives und als eine unumstößliche Wahrheit betrachten; dies darf man erst nach ganz genauen Berechnungen tun. Um die Sache einwandfrei klar zu legen, habe ich nachstehend die vollständigen und genauen Ausrechnungen ausgeführt für ein Sekunden-, ein Halbsekunden und ein Viertelsekundenpendel, so daß die erhaltenen Resultate als Beweise dienen können.

Beispielsweise habe ich angenommen, daß Uhren mit solchen Pendeln in dem bekannten Uhrenfabrikationsort »Lenzkirch« angefertigt werden und nach dem nördlicher und viel tiefer gelegenen »Hamburg« verschickt worden seien, und ich habe nun ausgerechnet, um wieviel diese Uhren, wenn sie in Lenzkirch genau reguliert worden sind, in Hamburg falsch gehen werden. Da es sich darum handelt, den Einfluß der geographischen Breite und der Höhenlage festzustellen, so sind natürlich diejenigen Gangdifferenzen, die aus Temperatur und Luftdruckeinflüssen entstehen können, nicht berücksichtigt. Man kann überdies annehmen, daß die betreffenden Pendel gegen solche Beeinflussung auf's genaueste kompensiert waren.

Lenzkirch liegt auf einer nördlichen Breite von 47° 40′ und ungefähr 800 m über der Nordsee, während Hamburg 53° 35′ nördliche Breite und schätzungsweise 10 m Höhe hat. Auf absolute Genauigkeit dieser Zahlen kommt es nicht an, denn meine Rechnung müßte ja für jeden Ortsunterschied, ob Lenzkirch-Hamburg, ob Furtwangen-Berlin oder dergleichen richtig sein. Als Erstes habe ich nun die Größe g, das ist die Erdbeschleunigung, für diese beiden Orte festzustellen. Hierzu dient die früher angeführte Formel, in welche die für Lenzkirch und Hamburg bekannten Werte eingesetzt werden:

Für Lenzkirch ist Winkel $\varphi = 47^{0}\,40'$, also $2\,\varphi = 95^{0}\,20'$ und $h = 800$. Da $95^{0}\,20'$ mehr als 90^{0} ist, so hat man statt $\cos 95^{0}\,20'$ in der Rechnung einzusetzen: $-\sin 5^{0}\,20'$, wodurch die Formel wie folgt aussieht:

g (Lenzkirch) $= 9{,}806056 - 0{,}025028\,(-\sin 5^{0}\,20') - 0{,}0024$.

Dies mit Hilfe der Logarithmen ausgerechnet gibt: g (Lenzkirch) $= 9{,}8059824$.

Für Hamburg ist Winkel $\varphi = 53^{0}\,35'$, also $2\,\varphi = 107^{0}\,10'$, und nach obigem ist $\cos 107^{0}\,10' = -\sin 17^{0}\,10'$; die Formel erhält also folgendes Bild:

g (Hamburg) $= 9{,}806056 - 0{,}025028\,(-\sin 17^{0}\,10') - 0{,}00003$.

Dies ebenfalls logarithmisch ausgerechnet gibt: g (Hamburg) $= 9{,}813413$.

Mit Hilfe der so gefundenen Werte sind nun die Pendellängen des Sekunden-, Halbsekunden- und Viertelsekundenpendels zu finden, sowohl für Lenzkirch wie für Hamburg, und zwar nach der bekannten Formel:

$L = \frac{t^2 g}{\pi^2}$. Nach Einsetzung der entsprechenden Werte hat man nachstehende Berechnungen auszuführen:

1. Sekundenpendel:

Für Lenzkirch:

$$L = \frac{1}{\pi^2} \cdot g = \frac{1}{\pi^2} \cdot 9{,}8059824 = 0{,}99355 \text{ m.}$$

Für Hamburg:

$$L = \frac{1}{\pi^2} \cdot 9{,}813413 = 0{,}9943 \text{ m.}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Pendellängen findet man, daß das Sekundenpendel in Hamburg 0,75 mm länger sein muß als in Lenzkirch.

2. Halbsekundenpendel:

Für Lenzkirch:

$$L = \frac{1}{2^2 \cdot \pi^2} \cdot 9{,}8059824 = 0{,}248388 \text{ m.}$$

Für Hamburg:

$$L = \frac{1}{2^2 \cdot \pi^2} \cdot 9{,}813413 = 0{,}248576 \text{ m.}$$

Das Halbsekundenpendel muß also 0,188 mm länger sein als dasjenige in Lenzkirch.

3. Viertelsekundenpendel:

Für Lenzkirch:

$$L = \frac{1}{4^2 \cdot \pi^2} \cdot 9{,}8059824 = 0{,}062097 \text{ m.}$$

Für Hamburg:

$$L = \frac{1}{4^2 \cdot \pi^2} \cdot 9{,}813413 = 0{,}062144 \text{ m.}$$

Ein Viertelsekundenpendel muß demnach in Hamburg 0,047 mm länger sein als in Lenzkirch.

Mit Hilfe der allgemein giltigen Formel $t = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ kann man die Zeitdauer (mit »t« bezeichnet) einer einzelnen Pendelschwingung berechnen. Wenn ich nun in diese Formel nacheinander für L die in den vorangehenden Berechnungen gefundene Länge einsetze, die ein Sekunden-, Halbsekunden- oder Viertelsekundenpendel tatsächlich haben muß, um in Lenzkirch richtig zu gehen, für g aber die für Hamburg berechnete Erdbeschleunigung, so erhalte ich die Zeitdauer, welche die in Lenzkirch richtig gehenden Pendel in Hamburg zur Ausführung einer Schwingung benötigen würden. Wenn man dann die Zeitdauer einer Schwingung beim Sekundenpendel mit 3600, beim Halbsekundenpendel mit 7200 und beim Viertelsekundenpendel mit 14400 multipliziert, so erhält man die Zeit, die diese Pendel in Hamburg benötigen, um die Anzahl Schwingungen ausführen zu können, zu denen sie in Lenzkirch eine Stunde gebrauchten.

Die Formel würde demnach für diesen Fall aussehen wie folgt:

$$t = \pi \sqrt{\frac{L \text{ (Lenzkirch)}}{g \text{ (Hamburg)}}} \cdot \text{Anzahl der stündlichen Schwingungen.}$$

Also für das Sekundenpendel:

$$\pi \sqrt{\frac{0{,}99355}{9{,}813413}} \cdot 3600 = 3598{,}6 \text{ Sekunden;}$$

für das Halbsekundenpendel:

$$\pi \sqrt{\frac{0{,}248388}{9{,}813413}} \cdot 7200 = 3598{,}6 \text{ Sekunden;}$$

für das Viertelsekundenpendel:

$$\pi \sqrt{\frac{0{,}062097}{9{,}813413}} \cdot 14400 = 3598{,}6 \text{ Sekunden.}$$

Diese genau gleichen Resultate zeigen, daß jedes der drei ganz verschieden langen Pendel in Hamburg 1,4 Sekunden weniger Zeit gebraucht als in Lenzkirch, oder mit anderen Worten: daß die in Lenzkirch richtig gehenden Pendel, ganz gleichgiltig, wie lang sie sind, in Hamburg 33,6 Sekunden täglich vorgehen werden durch den Einfluß, den die geographische Breite und die verschiedene Höhenlage beider Orte auf die Zeitdauer der Schwingungen ausübt.

Die als Beispiel durchgeführte Berechnung würde Giltigkeit haben für alle Orte, die auf dem gleichen Breitengrade und in gleicher Höhe über der Nordsee liegen wie Lenzkirch und Hamburg. Für andere Breitengrade und andere Höhenlagen muß dagegen die Berechnung in der gleichen Weise angestellt werden, indem man die entsprechenden Werte für den Winkel φ und für die Höhe h einführt. Es ist jedoch nicht erforderlich, daß man die Berechnungen für mehrere Pendel von verschiedenen Längen oder für ein bestimmtes Pendel aufstellt; man braucht vielmehr nur für irgend ein Pendel, am einfachsten für das Sekundenpendel, die Rechnung durchzuführen; dann hat man die Differenz für alle Pendellängen berechnet, wie dies aus dem vorangehenden Beispiel hervorgeht.

Für einige Orte, deren geographische Breite und Höhenlagen mir zufällig bekannt sind, habe ich die nachfolgenden Werte für die Erdbeschleunigung g sowie die Länge der Sekundenpendel ausgerechnet:

Ort	Geogr. Breite	Höhe	g	Länge des Sekundenpendels
Berlin	52° 30′	31 m	9,8124409	994,2 mm
Breslau . . .	51	111 m	9,8109267	994,02 mm
Frankfurt . . .	50	91 m	9,8101291	993,96 mm
Königsberg . .	55	10 m	9,8145862	994,425 mm
Hamburg . . .	53° 35′	10 m	9,813413	994,3 mm
Lenzkirch . . .	47° 40′	800 m	9,8059824	993,55 mm
Schramberg . .	48° 30′	425 m	9,80783115	993,73 mm

G. F. Bley.

d