Das Gegenschwungpendel

Von Dr. K. Giebel

Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels (Abb. 1) ist

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1}$$

worin l die Länge des Pendels und g die Beschleunigung der Schwerkraft ($=$ 9,81 m/sec²) ist. Das mathematische Pendel — eine ausdehnungslose Masse an einer masselosen Stange — läßt sich nur angenähert verwirklichen; bei allen wirklichen ($=$ physischen) Pendeln hat die Linse Ausdehnung und die Stange Masse. Unter Berücksichtigung dessen erhält man für die Schwingungsdauer des physischen Pendels (Abb. 2) die Formel:

$$T = \pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \tag{2}$$

In diesem Ausdrucke ist J das Trägheitsmoment, d. h. die Summe der Produkte aus den Massenelementen mal dem Quadrat ihrer Abstände von der Drehungsachse, also $J = m_1 \cdot \rho_1^2 + m_2 \cdot \rho_2^2 + \cdots$, wenn m_1, m_2 usw. die Massenelemente des Pendels, ρ_1, ρ_2 usw. ihre Abstände von der Drehungsachse sind. Denkt man sich die gesamte Masse m des Pendels in einem Punkte M vereinigt, der so gewählt ist, daß sein Abstand ρ von der Drehachse der Bedingung

$$m \cdot \rho^2 = m_1 \cdot \rho_1^2 + m_2 \cdot \rho_2^2 + \cdots = J$$

genügt, so nennt man ρ den Trägheitshalbmesser des Pendels und den Punkt M den Trägheitsmittelpunkt.

Der Ausdruck D in der Formel (2) ist das Direktions- oder Richtmoment, d. h. das Produkt aus dem Gewicht P mal dem Abstande r des Schwerpunktes G von der Drehachse A*).

Durch Vergleichung des mathematischen Pendels mit dem physischen ergibt sich aus den Formeln (1) und (2)

$$\frac{l}{g} = \frac{J}{D}$$

$$\text{oder} \quad l = \frac{J \cdot g}{D}. \tag{3}$$

Setzen wir hierin für J und D die oben gefundenen Werte ein, nämlich $J = m \cdot \rho^2$ und $D = P \cdot r$ oder, da $P = m \cdot g$ ist: $D = m \cdot g \cdot r$, dann erhalten wir:

$$l = \frac{m \cdot \rho^2 \cdot g}{m \cdot g \cdot r} \tag{4}$$

$$\text{oder} \quad l = \frac{\rho^2}{r}. \tag{4a}$$

Das ist die Beziehung zwischen den drei Größen, die am physischen Pendel zu unterscheiden sind. r ist der Abstand des Schwerpunktes G von der Drehachse A; ρ, der Trägheitshalbmesser, ist der Abstand des Trägheitsmittelpunktes M von der Drehachse A; l, die Länge des gleichwertigen mathematischen Pendels oder kurz „reduzierte Pendellänge" genannt, ist der Abstand des „Schwingungsmittelpunktes" S von der Drehachse.

Finden wir z. B. bei einem Pendel $r = 95{,}05$ cm, $\rho = 97{,}20$ cm, so ergibt sich die reduzierte Pendellänge $l = 99{,}4$ cm.

*) Dieses Direktionsmoment $D = P \cdot r$ ist nicht zu verwechseln mit dem Kraftmoment $\mathfrak{M}$. Dieses ist das Produkt aus Kraft (z. B. Gewicht) mal Hebelarm, wobei aber der Hebelarm senkrecht zur Kraftrichtung zu messen ist. Aus der Abbildung 2 ist jedoch zu ersehen, daß r nicht senkrecht auf P steht. Man erhält das Kraftmoment $\mathfrak{M}$, wenn man das Direktionsmoment D mit dem Sinus des Auslenkungswinkels ε multipliziert, den die Schwerpunktslinie mit der Ruhelage bildet: $\mathfrak{M} = D \cdot \sin \varepsilon$. Nur wenn dieser Winkel gleich 90° ist, d. h. wenn das Pendel wagerecht steht, ist D gleich $\mathfrak{M}$.

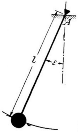

Abb. 1

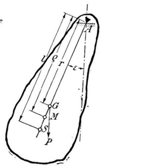

Abb. 2

Das in der Abbildung 2 dargestellte Pendel ist wegen seiner unregelmäßigen Gestalt ziemlich kompliziert. Betrachten wir jetzt, um der Rechnung näher zu kommen, das einfachste physische Pendel. An einer sehr leichten Stange, die wir in der Annäherung als gewichtlos ansehen, sind zwei Bleigewichte von z. B. $P = 2$ kg befestigt; das eine ist 0,8 m, das andere 1,0 m von der Drehachse entfernt (Abb. 3 a). Ihr gemeinsamer Schwerpunkt G liegt also bei 0,9 m. Die Massen der Bleigewichte sind $m = \frac{P}{g}$. Denken wir uns diese Massen in den Befestigungspunkten bei 0,8 und 1,0 m Abstand von der Drehachse vereinigt, d. h. sehen wir von der eigenen Ausdehnung der Bleischeiben ab, so ist das Trägheitsmoment der ersten Masse $J_1 = \frac{2}{g} \cdot 0{,}8^2$ und das der zweiten Masse $J_2 = \frac{2}{g} \cdot 1{,}0^2$, und das gesamte Trägheitsmoment des Pendels ist

$$J = J_1 + J_2 = \frac{2}{g}(0{,}8^2 + 1{,}0^2),$$

und für den Trägheitshalbmesser ergibt sich

$$\rho^2 = \frac{J}{m} = \frac{0{,}8^2 + 1{,}0^2}{2} = \frac{1{,}64}{2} = 0{,}82$$

$$\rho = 0{,}9055 \text{ m.}$$

Die reduzierte Pendellänge ist

$$l = \frac{\rho^2}{r} = \frac{0{,}82}{0{,}90} = 0{,}9111 \text{ m.}$$

Schieben wir jetzt die Massen nach den Punkten in den Abständen von 0,6 m und 1,2 m (Abb. 3 b) von der Drehachse, so wird an der Lage des Schwerpunktes G nichts geändert; dagegen wird jetzt

$$\rho^2 = \frac{0{,}36 + 1{,}44}{2} = 0{,}90; \ \rho = 0{,}95 \text{ m,}$$

und die reduzierte Pendellänge wird zu

$$l = \frac{0{,}90}{0{,}90} = 1 \text{ m.}$$

Würden wir jede der Massen nochmals um 0,2 m vom Schwerpunkt fortschieben, so würde

$$\rho^2 = \frac{0{,}16 + 1{,}96}{2} = 1{,}06; \ \rho = 1{,}03 \text{ m}$$

$$l = \frac{1{,}06}{0{,}90} = 1{,}177 \text{ m.}$$

Die reduzierte Pendellänge hängt also nicht ab von der Masse, sondern von der Massenverteilung.

Nachdem wir an diesem Beispiel die Wirkung der Massenverschiebung erläutert haben, wollen wir für zwei an einer gewichtlosen Stange befestigte Massen die allgemeine Gleichung für die reduzierte Pendellänge aufstellen. Nach Gleichung (4) ist

$$l = \frac{m \cdot g \cdot \rho^2}{m \cdot g \cdot r}. \qquad (4)$$

$m \cdot g$ ist das Gewicht P der Masse. Wir haben somit:

$$l = \frac{P \cdot \rho^2}{P \cdot r}.$$

Haben wir zwei Massen, so ist

$$l = \frac{P_1 \cdot \rho_1^2 + P_2 \cdot \rho_2^2}{P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2}.$$

Wenn wir von den eigenen Abmessungen der Massen absehen, oder wenn wir sie als verschwindend ansehen gegen-

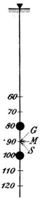

Abb. 3a

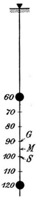

Abb. 3b

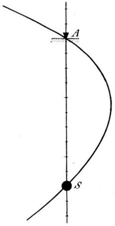

Abb. 4

über dem Abstande von der Drehachse, so fällt für jede der Massen ihr Schwingungsmittelpunkt mit ihrem Schwerpunkt zusammen, d. h. $\rho_1 = r_1$ und $\rho_2 = r_2$; es ist also:

$$l = \frac{P_1 \cdot r_1^2 + P_2 \cdot r_2^2}{P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2}. \qquad (5)$$

Die beiden Gewichte, die wir oben als gleich angenommen hatten, wählen wir jetzt verschieden schwer, z. B. $P_1 = 5$ kg, $P_2 = 2{,}5$ kg. Den Abstand r_1 halten wir fest, z. B. $r_1 = 1$ m; den Abstand r_2 nehmen wir veränderlich, d. h. wir lassen die zweite Masse auf der Pendelstange wandern.

Nehmen wir z. B. $r_2 = 0{,}8$ m, so erhalten wir für die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{5 \cdot 1^2 + 2{,}5 \cdot 0{,}8^2}{5 \cdot 1 + 2{,}5 \cdot 0{,}8} = \frac{5 + 1{,}6}{5 + 2} = \frac{6{,}6}{7} = 0{,}943 \text{ m}.$$

In der folgenden Tabelle sind für verschiedene Werte von r_2 die Werte von l zusammengestellt.

r_2	l	r_2	l
1,0 m	1,000 m	0,45 m	0,899 m
0,9	0,969	0,4	0,900
0,8	0,943	0,3	0,909
0,7	0,922	0,2	0,927
0,6	0,908	0,1	0,957
0,5	0,900	0,0	1,000

Für $r_2 = r_1 = 1$ m ist $l = 1$ m, denn die beiden Massen wirken wie eine; es ist deshalb $l = r_1$. Ebenso selbstverständlich ist, daß die Pendellänge größer wird, wenn P_2 nach unten verschoben ist. Wenn das zweite Gewicht aber nach oben verschoben wird, so wird die reduzierte Pendellänge kleiner, und zwar erreicht sie, wie unsere Tabelle zeigt, ihren kleinsten Wert, wenn das zweite Gewicht sich ungefähr in der Mitte der Pendelstange befindet (hier bei $r_2 = 0{,}45$ m). Verschiebt man es noch weiter nach unten, so wird die reduzierte Länge des Pendels wieder länger und erreicht ihren ursprünglichen Wert, wenn das zweite Gewicht im Drehpunkt angekommen ist. In der Abbildung 4 sind die für die jeweilige Lage des zweiten Gewichtes auftretenden Verkürzungen der Pendellänge nach rechts aufgetragen, nach links die Verlängerungen.

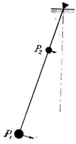

Abb. 5a

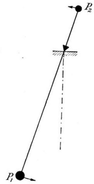

Abb. 5b

Eine Anwendung findet diese Veränderung der Pendellänge (und damit der Schwingungsdauer) durch Verschieben eines Laufgewichtes beim Huygensschen Läufer. Um die Empfindlichkeit einer Wage veränderlich zu machen, bringt man auf ihrem Zeiger ein Laufgewicht an. Schiebt man dieses nach unten, so werden die Schwingungen der Wage schneller. Bei der Feinstellung der Pendeluhren wird nicht ein Gewicht verschoben, sondern es wird ein Gewicht in die Mitte der Pendelstange gebracht, also dorthin, wo nach der Abbildung 4 die Wirkung am stärksten ist. Es ist dort ein Tellerchen angebracht, auf das man kleine Gewichte auflegen kann. Legt man ein Gewicht von rund $^1/_{1100}$ des Pendelgewichtes auf, so verursacht dies ein Vorgehen von 1 s im Tage.

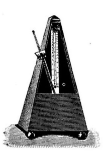

Abb. 6

Um den Einfluß der Luftschwere auszugleichen, bringt man bisweilen im oberen Viertel der Pendelstange einige Aneroiddosen an, die ein Gewicht tragen. Schwingt bei erhöhtem Luftdruck das Pendel langsamer, so werden gleichzeitig die Aneroiddosen zusammengedrückt, und das Gewicht bewegt sich auf die Mitte des Pendels zu, wodurch eine Beschleunigung hervorgerufen wird.

Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, daß das Laufgewicht sich auf der Pendelstange bewegt. Wie gestalten sich nun die Verhältnisse, wenn wir das Laufgewicht auf die Verlängerung der Pendelstange über den Drehpunkt hinausschieben? Schon aus der Abbildung 4 können wir ersehen, daß die Verlängerung der Kurve über A hinaus auf die linke Seite tritt, daß also das Gewicht P_2 (Abb. 5a und 5b) oberhalb des Drehpunktes eine Verlängerung der reduzierten Pendellänge und damit eine Verlangsamung der Schwingungen bewirkt. Zahlenmäßig können wir die Verlängerung der Pendellänge aus der Gleichung (5) bestimmen. Sinngemäß müssen wir darin für r_2 einen negativen Wert einführen, wenn P_2 oberhalb der Drehachse ist. Im Zähler ändert sich dadurch nichts, denn $(-r)^2 = +r^2$; im Nenner aber bekommt das zweite Glied ein Minuszeichen

$$l = \frac{P_1 \cdot r_1^2 + P_2 \cdot r_2^2}{P_1 \cdot r_1 - P_2 \cdot r_2}. \qquad (5a)$$

Für das Trägheitsmoment ist es also gleichgiltig, auf welcher Seite des Drehpunktes die Massen stehen. Das Direktionsmoment eines Gewichtes dagegen wirkt oberhalb des Drehpunktes entgegengesetzt als unterhalb. Das ergibt sich auch anschaulich aus den Abbildungen 5a und 5b. Während in der Abbildung 5a die beiden Gewichte bei der Rechtsbewegung abwärtsgehen, sich also in ihrer Wirkung unterstützen, wird in der Abbildung 5b das Gewicht P_2 gehoben; es schwächt also die Wirkung des Gewichtes P_1.

Ein solches Pendel, das ein Gewicht oberhalb der Drehachse trägt, nennt man ein Gegenschwungpendel.

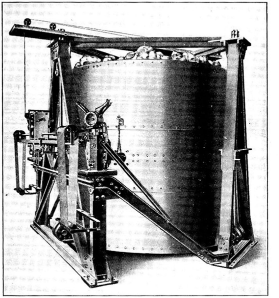

Abb. 7

Setzen wir nun in die Gleichung (5) unter Beibehaltung der vorher für P_1, P_2, r_1 benutzten Werte für r_2 verschiedene negative Werte ein, so erhalten wir folgende reduzierten Pendellängen:

r_2	l	r_2	l
0,0 m	1 m	— 1.5 m	8,5 m
— 0,5	1,5	— 2	8
— 1,0	3		

Durch Verschieben des Laufgewichtes über den Drehpunkt hinaus kann man also dem Pendel jede beliebige Pendellänge (und damit jede Schwingungsdauer) zwischen der ursprünglichen und „unendlich groß" geben. Die Schwingungsdauer „unendlich groß" bedeutet, daß das Pendel in jeder Lage stehen bleibt und überhaupt nicht mehr schwingt. Der Schwerpunkt befindet sich dann im Drehpunkte. Rückt man das Laufgewicht noch weiter hinaus, so kippt das Pendel um.

Es erscheint zunächst seltsam, daß diese bequeme Art, mit verhältnismäßig kurzen Pendeln eine große Schwingungsdauer zu erzielen, in der Uhrmacherei nicht angewendet wird; es hat aber seinen guten Grund. Nehmen wir ein Pendel von 1 m Länge und 7,5 kg Linsengewicht, so ist dessen Trägheitsmoment $\times\, g = J_1 \cdot g = 7{,}5$ kg m²; das Direktionsmoment ist $D_1 = 7{,}5$ kg m, die mathematische Pendellänge $l_1 = 1$ m und die Schwingungsdauer T_1 ungefähr 1^s. Nehmen wir nun von der Linse 2,5 kg fort und bringen sie auf der anderen Seite der Drehachse im selben Abstande an, so ist das Trägheitsmoment dasselbe geblieben. Die Direktionskraft D_2 ist 2,5 kg m geworden, die mathematische Pendellänge $l_2 = 3$ m, die Schwingungsdauer T_2 ungefähr $1{,}75^s$. Man hat so zwar die Schwingungsdauer um 75 % größer gemacht, aber auf Kosten des Direktionsmomentes, das bei gleichem Trägheitsmoment auf ⅓ seines ursprünglichen Betrages gesunken ist. Das Direktionsmoment ist aber ein Maß für die das Pendel dirigierende (antreibende) Kraft, und da diese bei gleichem Trägheitsmoment auf ⅓ gesunken ist, so ist das Pendel gegen äußere Störungen dreimal so empfindlich geworden. Es ist also als Gangregler unzuverlässiger geworden. Man könnte das ausgleichen, indem man das Trägheitsmoment vergrößert, aber das würde wieder andere Unzuträglichkeiten bringen.

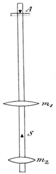

Abb. 8

Die Scheu des Uhrmachers vor dem Gegenschwungpendel ist also berechtigt. Allerdings darf sie nicht übertrieben werden. Wenn man z. B. behauptet, daß der leichte Übertragungsmechanismus, der sich oberhalb der Drehachse des Strasser- und des Rieflerpendels befindet, den Gang des Pendels beinträchtige, so ist das übertrieben. Der Einfluß hält sich unter $^1/_{100}$ %, wodurch die Zuverlässigkeit des Pendels sicher nicht beeinträchtigt wird.

Das Gegenschwungpendel findet aber doch eine ganze Reihe von Anwendungen. Am bekanntesten ist das Mälzlsche Metronom (Abb. 6), ein Taktschläger mit Antriebsfeder und ganz einfacher Hemmung, durch die ein kleines Pendel von etwa 4 cm Länge angetrieben wird. Das Pendel trägt oben eine Verlängerung, auf der sich ein kleines Laufgewicht befindet. Durch Verschieben des Laufgewichtes kann man die Zahl der Taktschläge pro Minute in weiten Grenzen verändern.

Eine andere Anwendung ist der Horizontalseismograph, der dazu dient, die Erdbebenwellen aufzuzeichnen. Das Pendel selbst soll während der Erschütterungen des Erdbodens in Ruhe bleiben und muß deshalb eine sehr große Eigenschwingungsdauer haben. Um es aber gegen andere Störungen unempfindlich zu machen, muß es eine sehr große Trägheit haben. Der bekannte Erdbebenforscher Wiechert hat ein solches Pendel konstruiert, das 17 000 kg Gewicht hat. Es besteht aus einem Eisenblechkessel von 2 m Durchmesser und 2 m Höhe, in dem sich eine Eisenmasse und Schwerspat befinden (Abb. 7). Die Drehachse befindet sich dicht über dem Schwerpunkt. Die Abbildung eines solchen Horizontalseismographen verdanken wir der Herstellerfirma Spindler & Hoyer G. m. b. H. in Göttingen.

Die für den Uhrmacher wichtigste Anwendung ist wohl das Reversionspendel. Es dient dazu, die mathematische Länge eines Pendels festzustellen (Abb. 8). Wenn man ein Pendel statt an seiner Drehachse A an einer Achse aufhängt, die durch den Schwingungsmittelpunkt S geht, so ist die Schwingungsdauer dieses neuen Pendels — wie sich leicht nachweisen läßt — gleich der Schwingungsdauer des ursprünglichen Pendels. Wenn man also umgekehrt einen Pendelstab mit zwei Achsen in den Punkten A und S versieht und zwei Massen m_1 und m_2 so auf dem Pendelstabe verschiebt, bis das Pendel beim Schwingen um die Achse A genau dieselbe Schwingungsdauer hat wie beim Schwingen um die andere Achse S, so ist S der Schwingungsmittelpunkt des um A schwingenden Pendels, und die Strecke AS ist die reduzierte oder mathematische Pendellänge. Leider läßt sich der Achsenabstand AS nicht so genau messen, daß man, wie früher einmal vorgeschlagen wurde, das Pendel einer gewissen Schwingungsdauer (z. B. 1^s) als Grundmaß der Längenmessung verwenden könnte. Dafür hat man heute bessere und genauere Methoden.

Quelle:Deutsche Uhrmacher-Zeitung Nr.48 vom 27. Nov. 1926
S.977-980